概率论与数理统计

习题解答

中国科技大学出版社

第 1 章

概率论的基本概念

1. 用事件A, B, C的运算关系式表示下列各事件

(1) A发生而B、C不发生;

(2) A与B发生, 而C不发生;

(3) A, B, C中至少有一个发生;

(4) A, B, C都发生;

(5) A, B, C都不发生;

(6) A, B, C中至多一个发生.

解: (1)$A\overline{BC}$, (2)$AB\overline{C}$, (3)$A \cup B \cup C$, (4)ABC, (5)$\overline{ABC}$, (6) $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$.

2. 对事件A, B, 证明下述结论.

(1) $A \cup B = A \cup B\overline{A}$;

(2) $B \cup A = \overline{AB} - \overline{\overline{A}B}$;

(3) $(A - B) \cup (B - A) = \overline{AB \cup \overline{A}\ \overline{B}}$.

3. 设$P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$. 问在什么条件下, (1) $P(AB)$取到最大值, 最大值是多少? (2) $P(AB)$取到最小值, 最小值是多少?

解: (1)由于$P(A) < P(B) \leqslant P(A \cup B)$, 所以当$P(A \cup B) = P(B)$有最大值. 此时$P(AB) = P(A) = 0.6$.

(2) 由于$O < P(A \cup B) \leqslant 1$, 所以当$P(A \cup B) = 1$时, $P(AB)$有最小值. 此时, $P(AB) = P(A) + P(B) - 1 = 0.3$

4. 设事件A,B,C满足

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=1/8.$$

求A,B,C至少有一个发生的概率.

解: 由题设, 事件A,B,C至少有一个发生可表示为$A\cup B\cup C$. 从而利用加法公式得:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)+P(ABC),$$

利用$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)$得

$$P(ABC)=0,\quad P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

5. 设$P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A-B)=0.3$. 求$P(A\cup B)$ 和$P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解: 由题设, $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$ 故$P(AB)=P(A)-0.3=0.2$.
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$,
$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=0.8$.

6. 在1 500件产品中有400件次品和1 100件正品. 现从中随机抽取200件, 求(1) 恰有90件次品的概率; (2) 至少有2件次品的概率.

解: (1) 记事件A为"恰有90个次品". 则$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$
(2) 记事件B为"至少有2个次品", B_i为 " 恰有i个次品"(i=0, 1,2$\cdots$200).
利用$B_iB_j=\phi,i\neq j$得

$$P(B)=P(\bigcup_{i=2}^{200}B_i)=\sum_{i=2}^{200}P(B_i).$$

再利用

$$P(\bar{B})=P(B_0\cup B_1)=P(B_0)+P(B_1)=\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}+\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

得

$$P(B)\ =\ 1-P(\bar{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

7. 从5双不同的鞋子中任取4只. 求这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率.

解: 解法一: 记B_i为事件"恰取到i双鞋", $i=0,1,2$. 则$B_iB_j=\phi$ 对于任意的$i\neq j$. 从而

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2) \\ &= \tfrac{C_5^1C_4^2 2^2}{C_{10}^2}+\tfrac{C_5^2}{C_{10}^4}=\tfrac{13}{21} \end{aligned}$$

解法二: 用逆事件. 考虑每只鞋的取法, 总的取法有C_{10}^4. 第1只鞋是从10只中任取一只, 并将与其配成一双的另一只去掉, 第2只鞋是从余下的8只鞋中任取一只, 再去掉与其配成一双的另一只, $\cdots$ 所以有利取法$k=10\times 8\times 6\times 4$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{13}{21}.$$

8. 某宾馆一楼有3部电梯. 今有5人要乘坐电梯, 假定各人选哪部电梯是随机的. 求每部电梯中至少有一人的概率.

解: $\frac{50}{81}$.

9. 设某地区电话号码是8字打头的八位数. 求

(1) 一个电话号码的八个数字全不相同的概率;

(2) 一个电话号码的八个数字不全相同的概率.

解: $(1)\frac{9!}{2!10^7}$, $(2)1-\frac{1}{10^7}$.

10. 甲、乙二人先后从52张牌中各自抽取13张. 试在甲抽后放回和不放回两种情况下, 甲或乙抽到4张A的概率.

解: (1) $\frac{2\mathrm{C}_{48}^9}{\mathrm{C}_{52}^{13}}$, (2) $\frac{2\mathrm{C}_{48}^9}{\mathrm{C}_{52}^{13}}-\frac{\mathrm{C}_{48}^9\mathrm{C}_{48}^9 C}{\mathrm{C}_{52}^{13}\mathrm{C}_{52}^{13}}$

11. 今有六人围坐在一起. 求他们的属相各不相同的概率.

解: 首先, 这六人属相的所有不同组合数为$12^6=2985984$种. 其次, 这六人的属相互补相同的组合数为$12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7=665280$. 故

$$p=665280/2985984=385/1728.$$

12. 在某城市中发行A, B, C三种报纸. 经调查, 订阅A报的有45%, 订阅B报的有35%, 订阅C报的有30%, 同时订阅A及B报的有10%, 同时订阅A及C报的有8%, 同时订阅B及C报

的有5%, 同时订阅A, B, C报的有3%. 求下列事件的概率: (1) 只订A报; (2) 只订A及B报; (3) 只订一种报纸; (4) 订两种报纸.

解: $(1)0.3, (2)0.07, (3)0.73, (4)0.14$

13. 将3个球随机地放入4个杯子中. 求杯子中球的最多个数分别为1, 2, 3的概率.

解: 用球选杯子, 总的放法为$n = 4^3$.

$(1)P(A_1) = \frac{A_4^3}{4^3} = \frac{6}{10}$

(2)看作将3个球中的某2个捆绑在一起, 然后看作将2个球随机放入不同的杯子中去. $P(A_2) = \frac{C_3^2 A_4^2}{4^3} = \frac{9}{16}$

$(3)P(A_3) = \frac{C_3^3 A_4^1}{4^3} = \frac{1}{16}$

14. 甲乙两艘轮船到港后均需在同一泊位停靠4个小时. 假定它们在未来12小时内等可能到达. 求这两艘轮船有一艘在停靠泊位时必须等待的概率.

解: 记A为事件"有一艘在停靠泊位时必须等待", 用x, y分别表示两船的到达时间. 样本空间为:

$$\Omega = \{(x, y)|0 \leqslant x \leqslant 12, 0 \leqslant y \leqslant 12\}$$

要使有一艘在停靠泊位时必须等待, x, y应满足$|x - y| \leqslant 4$. 所以

$$A = \{(x, y) \mid |x - y| \leqslant 4\}.$$

进而

$$P(A) = 1 - \frac{6^2}{12^2} = \frac{5}{9}.$$

15. 在区间$(0, 1)$中随机地取两个数. 计算下列事件的概率: (1) 两数之和小于$\frac{6}{5}$; (2) 两数之差的绝对值小于0.5.

解: $\frac{17}{25}, \frac{3}{4}$

16. 设$P(\overline{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\overline{B}) = 0.5$. 求$P(B|A \cup \overline{B})$.

解:

$$P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{P(B \cap (A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(BA \cup B\bar{B})}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A \cup \bar{B})}.$$

利用

$$P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = 0.7 - P(AB) = 0.5$$

和

$$P(AB) = 0.2, \quad P(AB) = 0.2, \quad P(A \cup \bar{B}) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

得

$$P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25.$$

17. 设$P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$. 求$P(A \cup B)$.

解: 利用条件概率的乘法公式,

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

和$P(AB) = P(B)P(A|B)$得

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

所以,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

18. 将一个骰子投两次. 若两次的点数之和为7, 求其中有一次点数为1的概率.

解: 令A表示事件“两颗骰子点数之和为7”, B表示事件“其中有一颗为1点”. 则所求概率为$P(B|A)$. 样本空间S中的基本事件总数$n = 36$, 而事件A出现的可能情况有6种.

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

由条件概率定义可知:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

19. 一个盒中有4个球, 分别编号$1, 2, 3, 4$. 现从盒中随机抽取一个, 并用A表示抽到的是1或2号球, 用B表示抽到的是1或3号球, 用C表示抽到的是1或4号球. 试验证:

$$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C),$$

但$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, 即事件A,B,C两两独立, 但A,B,C不相互独立.

20. 证明事件A与B相互独立的充分必要条件是$P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

21. 设10件产品中有2件次品. 今从中不放回随机抽取两件, 求下列事件的概率: (1) 两件都是正品; (2) 两件都是次品; (3) 一件是正品, 一件是次品; (4) 第二次取出的是次品.

解: 从10件产品中任取2件(不放回), 共有C_{10}^2种取法, 样本空间S中的基本事件总数$n=C_{10}^2$.

(1)令A为"两件都是正品", 说明产品均从8只正品中取出, 共有C_8^2中取法. 故$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$.

(2)令B为"零件都是次品", 则说明产品均从2件次品中取出, 共有C_2^2种取法. 故$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$

(3)令C为"一件是正品, 一件是次品", 则说明从8件正品中取出1件, 从2件次品取1件, 共有$C_8^1C_2^1$中取法. 故$P(C)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$

(4)令D为"第二次取出的次品", D还可以表示为"第一次取出正品, 第二次取出次品"$\cup$"第一次取出次品, 第二次取出次品", 共有$\frac{C_8^1C_2^1}{2}+\frac{C_2^1C_1^1}{2}$种取法, 故$P(D)=\frac{\frac{C_8^1C_2^1}{2}+\frac{C_2^1C_1^1}{2}}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$.

22. 三人独立地去破译一份密码, 已知各人能正确译出的概率分别为$1/5, 1/3, 1/2$. 试计算三人中至少有一人能将此密码译出的概率.

解: 事件A_i表示"第i个人能译出密码", $i=1,2,3$.

由题意知, $P(A_1)=\frac{1}{5}P(A_2)=\frac{1}{3}P(A_3)=\frac{1}{4}$.

用事件B表示"三人中至少有一人能将此密码译出", $B=A_1\cup A_2\cup A_3$.

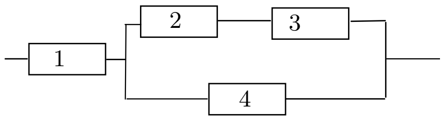
则对立事件$\bar{B}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. 从而

$$\begin{aligned}
P(\bar{B}) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(P(\bar{A}_2)P(P(\bar{A}_3) \\
&= [1-P(\bar{A}_1)][1-P(\bar{A}_2)][1-P(\bar{A}_3)] \\
&= (1-\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})=\tfrac{4}{5}\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{3}{4}=0.4
\end{aligned}$$

所以,$P(B)=1-P(\bar{B})=0.6$

0.7333.

23. 设有四个独立工作的元件$1,2,3,4$按下图方式连接, 它们的可靠性分别为p_1,p_2,p_3,p_4. 求该系统的可靠性.



解: 令事件A_i表示"第i个元件正常工作"$(i=1,2,3,4)$

事件A表示"系统正常工作", $A=A_1(A_2A_3\cup A_4)$ 由事件的独立性可知:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1(A_2A_3\cup A_4)) \\
&= P(A_1A_2A_3\cup A_1A_4) \\
&= P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\
&= p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4
\end{aligned}$$

24. (1) 设甲袋中装有m_1个白球, n_1个红球; 乙袋中装有m_2个白球, n_2个红球. 今从甲袋中任取一个放入乙袋中, 再从乙袋中抽取一个. 计算从乙袋中抽到白球的概率.

(2) 设甲盒子中装有5个红球, 4个白球; 乙盒子中装有4个红球, 5个白球. 先从甲盒子中任取2个球放入乙盒子中, 然后从乙盒子中任取一个球. 求抽到白球的概率.

解: (1)令事件A表示"从甲袋中取到白球", $P(A)=\frac{m_1}{m_1+n_1}$ $P(\bar{A})=\frac{n_1}{m_1+n_1}$.

令事件B表示"从乙袋中取到白球", $P(B|A)=\frac{m_2+1}{m_2+n_2+1}$ $P(B|\bar{A})=\frac{m_2}{m_2+n_2+1}$.

由全概率公式得:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= \frac{m_1}{m_1+n_1}\frac{m_2+1}{m_2+n_2+1}+\frac{n_1}{m_1+n_1}\frac{m_2}{m_2+n_2+1}
\end{aligned}$$

(2)令事件A_i表示"从第一个盒子中任取的2只球, 其中有i只白球$(i=0,1,2)$", 事件B表示"从第二个盒子中任取一只球是白球".

$P(A_0)=\frac{C_5^2}{C_9^2},P(A_1)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2},P(A_2)=\frac{C_4^2}{C_9^2}$.

$P(B|A_0)=\frac{C_5^1}{C_{11}^1},P(B|A_1)=\frac{C_6^1}{C_{11}^1},P(B|A_2)=\frac{C_7^1}{C_{11}^1}$.

由全概率公式得:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2) \\
&= \frac{C_5^2}{C_9^2}\times\frac{C_5^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}\times\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1} \\
&= \frac{19}{36}\times\frac{5}{11}+\frac{20}{36}\times\frac{6}{11}+\frac{6}{36}\times\frac{7}{11}=\frac{53}{99}
\end{aligned}$$

25. 有两箱同种类的零件. 第一箱装50件, 其中一等品10件; 第二箱装30件, 其中一等品18件. 今从任一箱中不放回抽取两次, 每次抽取一件. 求(1) 第一次抽到一等品的概率, (2) 在第一次抽到一等品的条件下, 第二次抽到一等品的概率.

解: 令事件A_i表示"挑到的第i箱", 事件B_i表示"第i次取到的零件是一等品"$(i=1,2)$. 则$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$.

(1)由题意可知: $P(B_1|A_1)=\frac{10}{50}$ $P(B_1|A_2)=\frac{18}{30}$. 利用全概率公式

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2) \\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{10}{50}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{18}{30}=0.4 \end{aligned}$$

(2)事件B_1B_2表示"两次取到的零件均是一等品", 依题意知:

$$P(B_1B_2|A_1)=\frac{10}{50}\times\frac{9}{49},\quad P(B_1B_2|A_2)=\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}.$$

由全概率公式知

$$\begin{aligned} P(B_1|B_2) &= P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|A_2) \\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{10}{50}\times\tfrac{9}{49}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{18}{30}\times\tfrac{17}{29}=0.19423 \end{aligned}$$

26. 甲、乙、丙3人同时向一架飞机射击, 设他们击中飞机的概率分别为$0.4, 0.5, 0.7$. 如果只有1人击中飞机, 则飞机被击落的概率是0.2, 如果有2人同时击中飞机, 则飞机被击落的概率是0.6, 如果3人都击中飞机, 则飞机一定被击落. 求飞机被击落的概率.

解: 0.458

27. 设第一个盒子中装有3个蓝球, 2个绿球, 2个白球; 第二个盒子中装有2个蓝球, 3个绿球, 4个白球. 现独立地分别在每个盒子中随机取出一个球. 求

(1) 至少取到一个蓝球的概率;

(2) 取到一个蓝球和一个白球的概率;

(3) 在已知至少抽到一个蓝球的条件下, 取到一个蓝球和一个白球的概率.

解: 设: A_1表示"从第一个盒子取到蓝球", A_2表示"从第一个盒中取到绿球", A_3表示"从第一个盒中取到白球". B_1表示"从第二个盒中取到蓝球", B_2表示"从第二个盒中取到绿球", B_3表示"从第二个盒中取到白球". 则

$$P(A_1)=\frac{3}{7},\quad P(A_2)=\frac{2}{7},\quad P(A_3)=\frac{2}{7},\quad P(B_1)=\frac{2}{9},\quad P(B_2)=\frac{3}{9},\quad P(B_3)=\frac{4}{9}$$

(1)事件C表示"至少有一个蓝球", 则$C=A_1\cup B_1$. 由概率的加法公式得:

$$\begin{aligned}P(C) &= P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1B_1)\\&= P(A_1)+P(B_1)-P(A_1)P(B_1)\\&= \tfrac{3}{7}+\tfrac{2}{9}-\tfrac{3}{7}\times\tfrac{2}{9}=\tfrac{5}{9}\end{aligned}$$

(2)设事件D表示"有一只蓝球一只白球", 则$D=A_1B_3\cup A_3B_1$, 且$A_1B_3\bigcap A_3B_1=\phi$ 所以

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A_1B_3\cup A_3B_1)\\&= P(A_1B_3)+P(A_3B_1)\\&= P(A_1)P(B_3)+P(A_3)P(B_1)\\&= \tfrac{3}{7}\times\tfrac{4}{9}+\tfrac{2}{7}\times\tfrac{2}{9}=\tfrac{16}{63}\end{aligned}$$

(3)由题意可知, 所求事件概率为$P(D|C)$, 利用条件概率可知: $P(D|C)=\frac{P(CD)}{P(C)}$
又因为$D\subset C$, 所以$CD=D$.

$$P(D|C)=\frac{P(D)}{P(C)}=\frac{\frac{16}{63}}{\frac{5}{9}}=\frac{16}{35}.$$

28. 设A,B,C三人在一装有固定电话的办公室工作. 据统计, 在该办公室的所有来电中, 打给A,B,C的电话的概率分别为$2/5,2/5,1/5$, 而他们三人因工作外出的概率分别为$1/2,1/4,1/4$. 设三人的行动相互独立. 求来电时无人接电话的概率和被呼叫人在办公室的概率.

在上述假设下, 若某时段打进3个电话. 求这3个电话打给同一个人的概率; 这3个电话打给不同人的概率; 在3个电话都打给B的条件下, B都不在的概率.

解: 设事件A_1表示"A被呼叫", 事件B_1表示"B被呼叫", 事件C_1表示"C被呼叫". 事件A_2表示"A外出", 事件B_2表示"B外出", 事件C_2表示"C外出".

由题意知: $P(A_1)=\frac{2}{5}$ $P(B_1)=\frac{2}{5}$ $P(C_1)=\frac{1}{5}$
$P(A_2)=\frac{1}{2}$ $P(B_2)=\frac{1}{4}$ $P(C_2)=\frac{1}{4}$.

(1) 用D_1表示事件"无人接电话", 则$D_1=A_2B_2C_2$. 又因三人行动相互独立, 故

$$P(D_1)=P(A_2B_2C_2)=P(A_2)P(B_2)P(C_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

(2) 用D_2表示事件"被呼叫的人在办公室", 则$D_2 = A_1\bar{A}_2 \cup B_1\bar{B}_2 \cup C_1\bar{C}_2$. 故

$$\begin{aligned} P(D_2) &= P(A_1\bar{A}_2 \cup B_1\bar{B}_2 \cup C_1\bar{C}_2) \\ &= P(A_1\bar{A}_2) + P(B_1\bar{B}_2) + P(C_1\bar{C}_2) \\ &= P(A_1)P(1-P(A_2)) + P(B_1)P(1-P(\bar{B}_2)) + P(C_1)P(1-P(\bar{C}_2)) \\ &= \tfrac{13}{20} \end{aligned}$$

(3) 用D_3表示事件"3个电话打给同一个人", 则$D_3 = A_1A_2A_3 \cup B_1B_2B_3 \cup C_1C_2C_3$. 从而

$$\begin{aligned} P(D_3) &= P(A_1A_2A_3 \cup B_1B_2B_3 \cup C_1C_2C_3) \\ &= P(A_1A_2A_3) + P(B_1B_2B_3) + P(C_1C_2C_3) \\ &= P(A_1)^3 + P(B_1)^3 + P(C_1)^3 \\ &= (\tfrac{2}{5})^3 + (\tfrac{2}{5})^3 + (\tfrac{1}{5})^3 = \tfrac{17}{125} \end{aligned}$$

(4) 用D_4表示事件"3个电话打个不同的人", 则根据打进电话的顺序,

$$D_4 = A_1B_1C_1 \cup A_1C_1B_1 \cup B_1A_1C_1 \cup B_1C_1A_1 \cup C_1A_1B_1 \cup C_1B_1A_1.$$

从而$P(D_4) = 6 \times \frac{4}{25} = \frac{24}{125}$.

(5) 用D_5表示事件"3个电话都打给B的条件下, 而B却不在". 则

$$P(D_5) = [P(B_2|B_1)]^3 = P(B_2)^3 = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}.$$

29. 某种仪器由三个部件组装而成. 假设各部件质量互不影响且他们的优质品率分别为$0.8, 0.7, 0.9$. 如果三个部件都是优质品, 则组装品为合格品; 如果三个部件有一个部件不是优质品, 则组装品的不合格率为0.2; 如果三个部件有两个部件不是优质品, 则组装品的不合格率为0.6; 如果三个部件都不是优质品, 则组装品的不合格率为0.9. 求

(1) 组装品的不合格率;

(2) 如果已经发现一台仪器不合格, 问它有几个部件不是优质品的概率最大.

解: (1) 0.1402 (2) 一个部件不是优质品的概率最大.

第 2 章

随机变量及其分布

1. 将一颗骰子抛掷两次, 用ξ表示两次抛掷后得到的最小点数. 求ξ的分布律.

解: 以Y_1、Y_2分别记第一次、第二次投掷时骰子出现的点数, 样本空间为:

$$S = \{(y_1, y_2)|y_1 = 1, 2, \cdots, 6; y_2 = 1, 2, \cdots, 6\}$$

共有$6 \times 6 = 36$个样本点.

$X = \min(Y_1, Y_2)$所有可能取值为$1, 2, 3, 4, 5, 6$这6个数, 当且仅当以下三种情况之一发生时事件$\{X = k\}(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$发生:

(i) $Y_1 = k$且$Y_2 = k+1, k+2, \cdots, 6$(共有$6-k$个点);

(ii) $Y_2 = k$且$Y_1 = k+1, k+2, \cdots, 6$(共有$6-k$个点);

(iii) $Y_1 = k$且$Y_2 = k$(仅有一个点).

因此事件$\{X = k\}$共包含$(6-k)+(6-k)+1 = 13-2k$个样本点, 于是X的分布律为:

$$P\{X = k\} = \frac{13-2k}{36}, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

2. 设某试验成功的概率为$p \in (0, 1)$. 现将该试验独立地重复多次, 并用ξ表示出现第一次成功时的试验次数, η表示第3次成功时的试验次数. 求ξ, η的分布律.

解: (1)此实验至少做一次, 此即ξ可能值的最小值, 若需做k次, 则前$k-1$ 次实验均失败, 最后一次成功. 由于各实验是相互独立的, 故分布律为:

$$P = \{X = k\} = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, 3 \cdots$$

(2)此实验至少做3次, 若需做k次, 则第k次必成功, 而前$k-1$次中至少有2次成功, 由于各次实验是相互独立的, 故分布律为:

$$P=\{X=k\}=\mathrm{C}_{k-1}^{2}p^{2}q^{(k-1)-2}p=\mathrm{C}_{k-1}^{2}p^{3}q^{k-3},k=3,4,5\cdots$$

3. 一房间有3个同样型号的窗户, 其中有一个是打开的. 现房间内有一小鸟在房间内飞来飞去, 试图从开着的窗户飞出去. 它飞向各个窗户的概率是相等的, 用ξ表示小鸟为了飞出房间试飞的次数.

(1) 若小鸟在飞行过程中是无记忆的, 求ξ的分布律.

(2) 若小鸟是有记忆的, 也就是它飞向同一窗户的尝试至多一次. 求ξ的分布律.

解: (1)本题的试飞次数是指记录鸟儿飞向窗子的次数加上最后飞离的一次, 其分布律为:

$$P(\xi=k)=(\frac{2}{3})^{k-1}(\frac{1}{3}),k=1,2\cdots$$

(2)由题意可知ξ可能取值为$1,2,3$.

$$P(\xi=1)=\frac{1}{3},\quad P(\xi=2)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1}{3\times 2}=\frac{1}{3},\quad P(\xi=3)\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_1^1}{3\times 2\times 1}=\frac{1}{3}$$

故其分布律为

$$P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3.$$

4. 一座楼装有5个同类型的供水设备. 调查表明在任一时刻每个设备被使用的概率为0.1. 令ξ为同一时刻设备被使用的个数. 求其分布律.

解: 由题意可知同一时刻被使用的个数$\xi\sim b(5,0.1)$. 故其分布律为:

$$P(\xi=k)=\mathrm{C}_5^k(0.1)^k(1-0.1)^{5-k}=\mathrm{C}_5^k(0.1)^k 0.9^{5-k},k=1,2,3,4,5$$

5. 在每次试验中事件A发生的概率为0.3. 当事件A发生的次数超过2次时, 指示灯发出信号. 分别求进行5次和7次独立试验时, 指示灯发出信号的概率.

解: (1)以X表示在5次试验中A发生的次数, 则$X\sim b(5,0.3)$, 指示灯发出信号这一事件可表示为$\{X\geqslant 3\}$, 故所求概率为:

$$P(X\geqslant 3)=\mathrm{C}_5^3 0.3^3(1-0.3)^2+\mathrm{C}_5^4 0.3^4(1-0.3)+(0.3)^5=0.163$$

(2)以Y记为7次试验中A发生的次数, 则$Y \sim b(7,0.3)$, 故指示灯发生信号的概率为:

$$\begin{aligned}
P(Y\geqslant 3) &= 1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)\\
&= 1-(1-0.3)^7-\mathrm{C}_7^1 0.3(1-0.3)^6-\mathrm{C}_7^2 0.3^2(1-0.3)^5\\
&= 0.353
\end{aligned}$$

6. 设甲、乙两人投篮时投中的概率分别为0.6、0.7. 今各投3次, 求(1) 两人投中次数相等的概率; (2) 甲比乙投中次数多的概率.

解: (1)以X、Y分别表示甲、乙投中的次数, 则:

$$X\sim b(3,0.6), Y\sim b(3,0.7).$$

则事件$\{X=Y\}$的概率包含以下情况:

$$(X=0)\cap(Y=0), (X=1)\cap(Y=1), (X=2)\cap(Y=2), (X=3)\cap(Y=3)$$

由于甲、乙投中与否是相互独立的, 从而:

$$\begin{aligned}
P(X=Y) =& \sum_{i=0}^{3} P\{(X=i)\cap(Y=i)\}\\
=& \sum_{i=0}^{3} P\{X=i\}P\{Y=i\}\\
=& (1-0.6)^3(1-0.7)^3+\mathrm{C}_3^1 0.6(1-0.6)^2\mathrm{C}_3^1 0.7(1-0.7)^2\\
& +\mathrm{C}_3^2 0.6^2(1-0.6)\mathrm{C}_3^2 0.7^2(1-0.7)+0.6^3 0.7^3\\
=& 0.321
\end{aligned}$$

(2)事件$(X>Y)$的概率可表示为下列两个互不相容事件之和, 即:

$$\{X>Y\}=\{(X=1)\cap(Y=0)\}\cup\{(X=2)\cap(Y\leqslant 1)\}\cup\{(X=3)\cap(Y\leqslant 2)\}.$$

由于甲、乙投中与否相互独立, 故

$$\begin{aligned}
P(X>Y) &= P\{(X=1)\cap(Y=0)\}+P\{(X=2)\cap(Y\leqslant 1)\}+P\{(X=3)\cap(Y\leqslant 2)\}\\
&= P(X=1)P(Y=0)+P(X=2)P(Y\leqslant 1)+P(X=3)P(Y\leqslant 2)\\
&= \mathrm{C}_3^1 0.6(1-0.6)^2(1-0.7)^3+\mathrm{C}_3^2 0.6^2(1-0.6)[(1-0.7)^2\\
&\quad +\mathrm{C}_3^1 0.7(1-0.7)^2]+0.6^3(1-0.7^3)\\
&= 0.243
\end{aligned}$$

7. 有一大批产品, 其验收方案如下: 先从中任取10件, 经检验无次品接受这批产品, 次品数大于2拒收; 否则再从中再任取5件, 当5件中无次品时接受这批产品, 否则拒收. 设产品的次品率为10%, 求

(1) 这批产品经第一次检验能被接受的概率;

(2) 需作第二次检验的概率;

(3) 这批产品在第一次检验未能作决定而第二次检验时被接受的概率;

(4) 这批产品被接受的概率.

解: (1) 以X表示所抽得10件产品含次品数, 以Y表示第一次抽检中出现的次品数, 则则$X \sim b(10, 0.1)$, $Y \sim b(5, 0.1)$. 由题设,

$$P_1(X=0) = (1-0.1)^{10} = 0.349$$

(2)需做第二次检验的概率为:

$$P_2(1 \leqslant X \leqslant 2) = \mathrm{C}_10^1 0.1(0.9)^9 + \mathrm{C}_10^2(0.1)^2(0.9)^8 = 0.581$$

(3)记$A_1 =${取出一个次品}, $A_2 =${取出2个次品}, $B =${第二次取出0个次品}.

$$\begin{aligned} P_3 &= P(A_1B) + P(A_2B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\ &= \mathrm{C}_10^1(0.9)^9 0.1(0.9)^5 + \mathrm{C}_10^2(0.9)8(0.1)^2(0.9)^5 \\ &= 0.343 \end{aligned}$$

(4)由题意可知此产品被接受的概率为:

$$P_4 = P_1 + P_3 = 0.692$$

8. 某商场各柜台收到消费者投诉事件数为$0, 1, 2$三种情况, 其概率分布分别为0.6, 0.3, 0.1. 有关部门每月抽查商场的两个柜台, 规定: 如果两个柜台收到投诉事件数之和超过1, 则给商场通报批评; 若一年中有三个月受到通报批评, 则该商场受挂牌处分一年. 求该商场一年内受到处分的概率.

解: 设B_i={ 第一个柜台收到i个投诉}; C_i={ 第二个柜台收到i个投诉}; 则$i = 0, 1, 2$. A={两个柜台一个月之内收到投诉数次数超过1(即通报批评)}; D={商场一年中有三个月受到通报批评(即挂牌处分)}; 从而

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(B_0C_0\cup B_1C_0\cup B_0C_1)=1-0.6\times0.6-0.6\times0.3\times2=0.28$.

记ξ为两个柜台在一年内收到投诉的次数之和. 则$\xi\sim b(12,0.28)$, 从而

$$P(D)=P(\xi\geqslant 3)=1-C_{12}^0 0.28^0 0.72^{12}-C_{12}^1 0.28^1 0.72^{11}-C_{12}^2 0.28^2 0.72^{10}\approx 0.696.$$

9. 一电话总机每分钟收到呼叫的次数服从参数为4的泊松分布. 求: (1) 某分钟恰有8次呼叫的概率; (2) 某分钟的呼叫次数大于3的概率.

解: 以X记电话总机一分钟收到的呼唤的次数, 则$X\sim\pi(4)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{4^k}{k!}e^{-4},k=1,2,3\cdots$$

(1)某一分钟恰有8次呼叫的概率为:

$$P(X=8)=\frac{4^8}{8!}e^{-4}=0.0298$$

(2)某一分钟呼叫次数>3的概率为:

$$\begin{aligned}P(X>3)= & \sum_{k=4}^{\infty}P\{X=k\}=1-\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\\ = & 1-\sum_{k=0}^{3}\tfrac{4^k}{k!}e^{-4}=0.5665\end{aligned}$$

10. 设任意t小时内, 某急救中心收到紧急呼救的次数ξ服从参数为$\frac{t}{2}$的泊松分布. 求

(1) 某天从中午12时至下午3时没有收到紧急呼救的概率;

(2) 某天从中午12时至下午5时至少收到1次紧急呼救的概率.

解: (1) 0.223, (2) 0.918

11. 设某设备在任意t时间段内发生故障的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布. 求

(1) 相继两次故障之间的时间段T的概率分布;

(2) 求在设备已经无故障工作8小时的情况下, 再无故障运行8小时的概率.

解: (1) 参数为λ的指数分布, (2) $\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

12. 在区间$[0,1]$上任意投掷一个质点, 以ξ表示这个质点的坐标. 设这个质点落在$[0,1]$中任意小区间内的概率与该小区间的长度成正比. 求ξ的分布函数.

13. 用ξ表示某商店从早晨开始营业起到第一个顾客到达的等待时间(以分钟计). 其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}, & \text{若}x>0,\\ 0, & \text{若}x\leqslant 0.\end{cases}$$

计算概率(1) $P(\xi\leqslant 3)$; (2) $P(\xi\geqslant 4)$; (3) $P(3\leqslant\xi\leqslant 4)$; (4) $P(\xi=2.5)$.

14. 设随机变量ξ的绝对值不大于1, 且$P(\xi=-1)=\frac{1}{8}, P(\xi=1)=\frac{1}{4}$. 在事件$\{-1<\xi<1\}$发生的条件下, ξ在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比. 求(1) ξ的分布函数$F(x)=P(\xi\leqslant x)$; (2) ξ取负值的概率.

解: (1)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ (5x+7)/16, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$$

(2) 7/16

15. 设随机变量ξ的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a, & \text{若 } x\leqslant 1,\\ bx\ln x+cx+d, & \text{若 } 1<x\leqslant e,\\ d, & \text{若 } x>e.\end{cases}$$

试确定a,b,c,d的值, 并计算概率$P(|\xi|\leqslant e/2)$.

解: 首先, 利用$F(-\infty)=0$和$F(+\infty)=1$得$a=0, d=1$. 其次, 利用连续型随机变量的连续性得

$$F(1+)=F(1)=0,\quad F(e)=F(e+)=1.$$

代入得

$$c+1=0,\quad be+ce+1=1.$$

解之得$b=1, c=-1$.

(2) $e/2\ln\frac{e}{2}+-\frac{e}{2}+1$

16. 设随机变量ξ的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & \text{若 } |x|\leqslant\pi/2,\\ 0, & \text{若 } |x|>\pi/2.\end{cases}$$

求(1) 常数A; (2) ξ落在$(0,\pi/4)$内的概率; (3) 分布函数$F(x)$.

解: (1) $A=1/2$, (2) $\sqrt{2}/4$, (3)

$$F(x)=\begin{cases}0, & \\ \frac{\sin x+1}{2} & -\pi/2\leqslant x<\pi/2 \\ 1 & x\geqslant \pi/2\end{cases}$$

17. 一盒中有5个纪念章, 分别编号$1,2,3,4,5$. 在其中等可能地任取3个, 并用ξ 表示取出的3个纪念章上的最大号码. 求ξ的分布律和分布函数.

18. 设$F_1(x),F_2(x)$为分布函数, 请问$F_1(x)+F_2(x)$是否为分布函数？再若a_1,a_2是正常数, 且$a_1+a_2=1$, 证明$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$是分布函数.

解: 不妨设$F_1(x),F_2(x)$为连续型随机变量ξ_1,ξ_2的分布函数. 则它们的概率密度函数分别为

$$f_1(x)=F_1'(x),\quad f_2(x)=F_2'(x).$$

对满足$a_1+a_2=1$的正数a_1,a_2, 令$f(x)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)$. 则对任意的$x\in R$, 定义随机变量ξ满足

$$P(\xi\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}(a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\,\mathrm{d}t=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)\in(0,1).$$

所以,$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$为该随机变量的分布函数.

19. 设某器件的寿命(以小时计)的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1\,000}{x^2}, & \text{若 } x>1\,000, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

今从一大批此种器件中任取5只, 试计算其中至少有2只寿命大于1500小时的概率.

解: 任取其中一只, 其寿命大于1500h的概率为:

$$P=\int_{1500}^{\infty}\frac{1000}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

设任取5只, 其中寿命大于1500h的只数记为X. 则$X\sim b(5,2/3)$ 则:

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 2\}= &\ 1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\\ = &\ 1-(\tfrac{1}{3})^5-\mathrm{C}_5^1\tfrac{2}{3}(1-\tfrac{2}{3})^4=\tfrac{232}{243}\end{aligned}$$

20. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间ξ(以分计)服从指数分布, 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x/5}, & \text{若 } x>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务, 若超过10分钟, 他就离开. 他一个月要到银行5次, 以η表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数. 求η的分布律, 并计算$P(\eta\geqslant 1)$.

解: 由题设, 顾客在窗口等待服务超过10分钟的概率为:

$$P=\int_{10}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}x=e^{-2}$$

故顾客去银行一次因未等到服务而离开的概率为e^{-2}, 设他一个月到银行5次, 未等到服务而离开的次数$\eta\sim(5,e^{-2})$. Y的分布律为:

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5.$$

$$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5=0.5167.$$

21. 设随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}12x^2-12x+3, & \text{若 } 0<x<1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

试计算$P(\xi\leqslant 0.2|0.1<\xi\leqslant 0.5)$.

解: 0.578125

22. 设η服从参数为1的指数分布. 对任意$a>0$, 计算条件概率$P(\eta\leqslant a+1|\eta>a)$.

解: $1-\mathrm{e}^{-1}$

23. 设参数k在区间$(0,5)$内服从均匀分布. 求下述二次方程有实根的概率

$$4x^2+4kx+k+2=0$$

解: 要使$4x^2+4kx+k+2=0$有实根, 则:

$$\Delta=(4k)^2-4\times 4(k+2)\geqslant 0\Longrightarrow k\geqslant 2\text{或}k\leqslant -1$$

由于参数k在$(0,5)$内服从均匀分布. 则:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & x\in(0,5),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}P &= p(k\geqslant 2)\cup P(k\leqslant -1)\\ &= \int_2^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-1} f_k(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_2^5 \tfrac{1}{5}\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}x=\tfrac{3}{5}\end{aligned}$$

即: 二次方程有实根的概率为$\frac{3}{5}$.

24. 设某100件产品中, 90件为合格品, 10件为次品. 今随机从中抽取2件安装在某台机器上. 若该机器有i件次品, $i=0,1,2$, 则机器的使用寿命服从参数为$\lambda=i+1$的指数分布. (1) 求设备寿命超过1 的概率; (2) 已知设备寿命超过1, 求安装在设备上的两个零件都是合格品的概率.

解: (1) 0.32, (2) 0.93.

25. 设某批螺栓的长度(cm)服从参数为$\mu=10.05,\sigma=0.06$的正态分布. 规定长度在10.05±0.12范围内的螺栓为合格品. 求该批产品中一螺栓为不合格品的概率.

解: 设规定长度X, $X\sim N(10.05,0.06^2)$, 螺栓不合格的概率为:

$$\begin{aligned}P &= 1-P(10.05-0.12<X<10.05+0.12)\\ &= 1-P[\tfrac{(10.05-0.12)-10.05}{0.06}<\tfrac{x-10.05}{0.06}<\tfrac{(10.05+0.12)-10.05}{0.06}]\\ &= 1-[\phi(2)-\phi(-2)]\\ &= 1-\phi(2)+[1-\phi(2)]\\ &= 2-2\phi(2)=0.0456\end{aligned}$$

26. 设某种元件的寿命ξ(以小时计) 服从参数为$\mu=160,\sigma>0$的正态分布. 要使$P(120<\xi\leqslant 200)\geqslant 0.8$, 求$\sigma$的最大值.

解: 为使$X\sim N(160,\sigma^2)$满足

$$\begin{aligned}P\{120<X<200\} &= P\{\tfrac{120-160}{\sigma}<\tfrac{x-160}{\sigma}\leqslant\tfrac{200-160}{\sigma}\}\\ &= \phi(\tfrac{40}{\sigma})-\phi(\tfrac{-40}{\sigma})=2\phi(\tfrac{40}{\sigma})-1\geqslant 0.80\end{aligned}$$

需有

$$\phi(\frac{40}{\sigma}) \geqslant 0.9 = \phi(1.282)$$

即

$$\frac{40}{\sigma} \geqslant 1.282, \sigma \leqslant \frac{40}{1.282} = 31.20$$

所以允许σ最大为31.20.

27. 设随机变量ξ的分布律为

ξ	-2	-1	0	1	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求$\eta = \xi^2$的分布律.

解: 由图表可知: $\eta = \xi^2$

$$\begin{aligned} P(Y=0) = & \ P(X=0) = \tfrac{1}{5} \\ P(Y=1) = & \ P(X^2=1) = P\{(X=1)\cup(X=-1)\} = \tfrac{7}{30} \\ P(Y=4) = & \ P(X^2=4) = P\{(X=2)\cup(X=-2)\} = \tfrac{1}{5} \\ P(Y=9) = & \ P(X^2=9) = P\{(X=3)\cup(X=-3)\} = \tfrac{11}{30} \end{aligned}$$

故Y的分布律为

Y	0	1	4	9
P	1/5	7/30	1/5	11/30

28. 某单位招聘155人, 按考试成绩录用, 共有526人报名. 假设报名者考试成绩$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 已知90分以上12人, 60分以下83人. 若从高分到低分依次录取, 某人成绩为78分, 问此人能否被录取?

解: 能

29. 设随机变量ξ在区间(0, 1) 内服从均匀分布. (1) 求$\eta = \mathrm{e}^{\xi}$的概率密度; (2) 求$\eta = -2\ln\xi$的概率密度函数.

解: X在区间$(0,1)$服从均匀分布, 则

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)因$Y = e^{\xi} > 0$故当$y \leqslant 0$时, $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = 0$, 从而$f_Y(y) = 0$. 当$y > 0$时:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(e^x \leqslant y) = P(x \leqslant \ln y) = F_X(\ln y)$$

则

$$F_Y(y) = f_X(\ln y)\frac{1}{y} = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y}, & 0 < \ln y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2)当X在$(0,1)$上时, $Y > 0$, 故当$y \leqslant 0$时, $F_Y(y) = 0$, 从而$f_Y(y) = 0$. 当$y > 0$时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = & \ P(Y \leqslant y) = P(-2\ln x \leqslant y) = P(X \geqslant e^{-\frac{y}{2}}) \\ = & \ 1 - P(X < e^{-\frac{y}{2}}) = 1 - F_X(e^{-\frac{y}{2}}) \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \cdot 1, & 0 < e^{-\frac{y}{2}} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

30. 设随机变量$\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 若

$$P(|\xi - \mu_1| \leqslant 1) > P(|\eta - \mu_2| \leqslant 1),$$

试比较σ_1和σ_2的大小.

解: 由题意可知: ξ服从正态分布(μ_1, σ_1^2), η服从正态分布$N(\mu_2, \sigma_2^2)$且$P(|\eta - \mu_2| \leqslant 1)$ 则

$$\begin{aligned} P(|\xi - \mu_1| \leqslant 1) &= P(-1 \leqslant \xi - \mu_1 \leqslant 1) = P(-\tfrac{1}{\sigma_1} \leqslant \tfrac{\xi - \mu_1}{\sigma_1} \leqslant \tfrac{1}{\sigma_1}) \\ &= \phi(\tfrac{1}{\sigma_1}) - \phi(-\tfrac{1}{\sigma_1}) = 2\phi(-\tfrac{1}{\sigma_1}) - 1 \end{aligned}$$

同理可求:

$$P(|\eta - \mu_2| \leqslant 1) = 2\phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1$$

由题设得

$$2\phi(\frac{1}{\sigma_1}) - 1 > 2\phi(\frac{1}{\sigma_2}) - 1$$

整理得

$$\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2} \Longrightarrow \sigma_1 < \sigma_2$$

31. 设$\xi \sim N(0,1)$. 试分别求$\mathrm{e}^{\xi}, 2\xi^2+1$和$|\xi|$的概率密度函数.

解: 已知$\xi \sim N(0,1), f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

(1)$\eta=e^{\xi}>0$, 对于任意$y\leqslant 0, F_Y(y)=P(\eta\leqslant y)=0$ 则当$y>0$时:

$$F_Y(y)=P(\eta\leqslant y)=P(e^{\xi}\leqslant y)=P(\xi\leqslant \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\cdot\frac{1}{y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故$Y=e^{\xi}$的概率密度为:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)因$\eta = 2\xi^2+1 \geqslant 1$, 故对任意$y<1$的数, $F_\eta(y)=P(\eta\leqslant y)=0$, 从而$f_\eta(y)=0$.

当$y\geqslant 1$时,

$$\begin{aligned}F_\eta(y) &= P(\eta\leqslant y)=P(2\xi^2+1\leqslant y)\\ &= P(-\sqrt{\tfrac{y-1}{2}}\leqslant \xi\leqslant \sqrt{\tfrac{y-1}{2}})\\ &= P(\xi\leqslant \sqrt{\tfrac{y-1}{2}})-P(\xi\leqslant -\sqrt{\tfrac{y-1}{2}})\\ &= \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}f_\eta(y)= &\ F_\eta'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{\sqrt{y-1}}{2})^2}{2}}\cdot 2, & y\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\\ = &\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}, & y\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

故$\eta=2\xi^2+1$的概率密度为:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{(y-1)}{4}}, & y\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)因$\eta=|\xi|\geqslant 0$, 故对任意$y<0, f_Y(y)=0$. 当$y\geqslant 0$时,

$$\begin{aligned} F_\eta(y)= & \ P(|\xi|\leqslant y)=P(-y\leqslant y)=P(\xi\leqslant y)-P(\xi\leqslant -y) \\ = & \ \int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-y} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

则:

$$f_\eta(y)=F'_\eta(y)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\geqslant 0, \\ 0, & y<0. \end{cases}=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故$\eta=|\xi|$的概率密度为:

$$f_\eta(y)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

32. 设随机变量ξ服从参数为2的指数分布, 求$\eta=1-\mathrm{e}^{-2\xi}$的分布.

解: $\eta\sim U(0,1)$

33. 设随变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & \text{若 } x\in[1,8], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$F(x)$是ξ的分布函数. 求随机变量$\eta=F(\xi)$的分布函数.

解:

$$G(y)=\begin{cases} 0 & y\leqslant 0, \\ y & 0<y<1, \\ 1 & y\geqslant 1. \end{cases}$$

34. 设随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{若 } 0<x<3, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求随机变量

$$\eta=\begin{cases} 2, & \text{若 } \xi\leqslant 1, \\ \xi, & \text{若 } 1<\xi<2, \\ 1, & \text{若 } \xi\geqslant 2. \end{cases}$$

的分布函数和$\xi\leqslant\eta$的概率.

第 3 章

二维随机变量及其分布

1. 某箱子中装有12个开关, 其中2个是次品. 今用放回抽样和不放回抽样分别从中抽取两次, 每次抽取一件. 试在两种情况下分别写出(ξ,η)的联合分布律, 其中

$$\xi=\begin{cases}1, & \text{第一次取出正品,}\\ 0, & \text{第一次取出次品.}\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}1, & \text{第二次取出正品,}\\ 0, & \text{第二次取出次品.}\end{cases}$$

解: (1)放回抽样. 根据题意可知, 第一次抽取的结果不会影响第二次抽取的结果的概率. 即随机变量ξ,η相互独立, 且求分布律:

$$P(\xi=1)=P(\eta=1)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$P(\xi=0)=P(\eta=0)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

(ξ,η)的所有可能取值为(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)所以

$$\begin{aligned}
P\{\xi=0,\eta=0\}=&\ P(\xi=0)P(\eta=0)=\tfrac{1}{36},\\
P\{\xi=0,\eta=1\}=&\ P(\xi=0)P(\eta=1)=\tfrac{1}{6}\times\tfrac{5}{6}=\tfrac{5}{36}\\
P\{\xi=1,\eta=0\}=&\ P(\xi=1)P(\eta=0)=\tfrac{5}{6}\times\tfrac{1}{6}=\tfrac{5}{36}\\
P\{\xi=1,\eta=1\}=&\ P(\xi=1)P(\eta=1)=\tfrac{5}{6}\times\tfrac{5}{6}=\tfrac{25}{36}
\end{aligned}$$

即ξ和η的联合分布律:

η \ ξ	0	1
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

(2)不放回抽样. 依题意可知, 第一次取出的结果会影响第二次取出的结果的概率, 故得如下条件概率:

$$\begin{aligned} P(\eta=0|\xi=0) = & \ \tfrac{1}{11}, \qquad P(\eta=0|\xi=1)=\tfrac{2}{11} \\ P(\eta=1|\xi=0) = & \ \tfrac{10}{11}, \qquad P(\eta=1|\xi=1)=\tfrac{9}{11} \end{aligned}$$

又因为$P(\xi=0)=\frac{2}{12}, P(\xi=1)=\frac{10}{12}$, 所以

$$\begin{aligned} P\{\xi=0,\eta=0\} = & \ P\{\eta=0|\xi=0\}P(\xi=0)=\tfrac{1}{11}\times\tfrac{2}{12}=\tfrac{1}{66} \\ P\{\xi=1,\eta=0\} = & \ P\{\eta=0|\xi=1\}P(\xi=1)=\tfrac{2}{11}\times\tfrac{10}{12}=\tfrac{10}{66} \\ P\{\xi=0,\eta=1\} = & \ P\{\eta=1|\xi=0\}P(\xi=0)=\tfrac{10}{11}\times\tfrac{2}{12}=\tfrac{10}{66} \\ P\{\xi=1,\eta=1\} = & \ P\{\eta=1|\xi=1\}P(\xi=1)=\tfrac{9}{11}\times\tfrac{10}{12}=\tfrac{45}{66} \end{aligned}$$

即ξ和η的联合分布律:

η \ ξ	0	1
0	$\frac{1}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{45}{66}$

2. 某盒子中装有3个黑球、2个红球、2个白球. 今从中任取4个, 并分别用ξ和η表示取到黑球和红球的个数. 求(ξ,η)的联合分布律.

解: 依题意可知, ξ表示取到黑球的只数, 即ξ所有可能的取值为$\xi=0,1,2,3$. η表示取到红球的只数, η所有可能的取值为$\eta=0,1,2$. 令$P_{ij}=P\{\xi=i,\eta=j\}, i=0,1,2,3. j=0,1,2$. 从而

$$\begin{aligned} & P\{\xi=0,\eta=0\}=0, \quad P\{\xi=0,\eta=1\}=0 \\ & P\{\xi=0,\eta=2\}=\tfrac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\tfrac{1}{35} \\ & P_{10}=P\{\xi=1,\eta=0\}=0 \\ & P_{11}=P\{\xi=1,\eta=1\}=\tfrac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\tfrac{6}{35} \\ & P_{12}=P\{\xi=1,\eta=2\}=\tfrac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^{47}}=\tfrac{6}{35} \\ & P_{20}=P\{\xi=2,\eta=0\}=\tfrac{C_3^2C_2^0C_2^2}{C_7^4}=\tfrac{3}{35} \\ & P_{21}=P\{\xi=2,\eta=1\}=\tfrac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\tfrac{12}{35} \\ & P_{22}=P\{\xi=2,\eta=2\}=\tfrac{C_3^2C_2^2C_2^0}{C_7^4}=\tfrac{3}{35} \end{aligned}$$

$$P_{30} = P\{\xi = 3, \eta = 0\} = \frac{C_3^3 C_2^0 C_2^1}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$
$$P_{31} = P\{\xi = 3, \eta = 1\} = \frac{C_3^3 C_2^1 C_2^0}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$
$$P_{32} = P\{\xi = 3, \eta = 2\} = 0$$

故ξ和η的联合分布律:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0

3. 设随机变量U_k $(k = 1, 2, 3)$相互独立, 且均服从参数为p的0-1分布. 令

$$\xi = \begin{cases} 1, & 若U_1 + U_2为奇数, \\ 0, & 若U_1 + U_2为偶数, \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} 1, & 若U_3 + U_2为奇数, \\ 0, & 若U_3 + U_2为偶数. \end{cases}$$

求(ξ, η)的联合分布律.

解: ξ和η的联合分布律为

$\eta \backslash \xi$	0	1
0	$(1-p)^3 + p^3$	$p(1-p)$
1	$p(1-p)$	$p(1-p)$

4. 设某班车起点站的上车人数ξ服从参数为λ的泊松分布, 每位乘客中途下车的概率为$p \in (0, 1)$, 并设乘客之间相互独立. 若用η表示中途下车的人数, 求在发车时有n 个乘客的条件下, 中途有m人下车的概率, 并给出(ξ, η)的联合分布律.

解: (1) $P(\eta = m | \xi = n) = \mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{n-m}$,

(2)

$$P(\xi = n, \eta = m) = \mathrm{C}_n^m p^m (1-p)^{n-m} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!} \lambda^n \quad (0 \leqslant m \leqslant n, n = 1, 2, \cdots)$$

5. 设(ξ,η)的联合分布律为

$\eta \backslash \xi$	x_1	x_2	x_3
y_1	a	$1/9$	c
y_2	$1/9$	b	$1/3$

若ξ与η相互独立, 求参数a,b,c的值.

解: $a=1/18, b=2/9, c=1/6$

6. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & \text{若 } 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试确定常数k, 并计算概率$P(\xi<1,\eta<3)$, $P(\xi<1.5)$, $P(\xi+\eta\leqslant 4)$.

解: (1)利用二维随机变量密度性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$得,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

其中,D为图(1) 中阴影部分区域. 所以,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^4(6-x-y)K\,\mathrm{d}y=8K=1, K=\frac{1}{8}$$

即

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2)$P(\xi<1,\eta<3)$表示随机变量(ξ,η)落在平面区域的概率.

$$P(\xi<1,\eta<3)=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因为概率密度函数f(x,y)仅在图(2)中阴影部分区域才具有非零解, 即

$$\begin{aligned} P(\xi<1,\eta<3) &= \int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_2^3\tfrac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1(\tfrac{7}{16}-\tfrac{1}{8}x)\,\mathrm{d}x=\tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

(3)

$$P(\xi<1.5)=\int_{-\infty}^{1.5}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

同样概率密度函数f(x,y)仅在图(3)中阴影部分区域才具有非零解.

$$\begin{aligned}P(\xi<1.5)=&\ \int_0^{1.5}\int_2^4 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\ \int_0^{1.5}\,\mathrm{d}x\int_2^4\tfrac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y=\tfrac{27}{32}\end{aligned}$$

(4)图(4)中阴影部分区域为概率密度函数f(x,y)积分的非零区域, 即

$$\begin{aligned}P(\xi+\eta\leqslant 4)=&\ \int_0^2\int_2^{4-x}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ =&\ \int_0^2\,\mathrm{d}x\int_2^{4-x}\tfrac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y=\tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

7. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & \text{若 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求ξ,η的边缘概率密度函数.

解: 二维随机变量(ξ,η)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

二维随机变量(ξ,η)的分布区域如图5所示. 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,

$$\begin{aligned}f_\xi(x)=&\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ =&\ \int_0^x 4.8(2-x)y\,\mathrm{d}y=2.4x^2(2-x)\end{aligned}$$

故关于ξ的边缘概率密度函数为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x) & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当$0\leqslant y\leqslant 1$时,

$$\begin{aligned}f_\eta(y)=&\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ =&\ \int_y^1 4.8y(2-x)\,\mathrm{d}x\\ =&\ 2.4y(3-4y+y^2)\end{aligned}$$

故

$$f_\eta(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2) & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

8. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & \text{若 } 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求ξ,η的边缘概率密度函数.

解: 当$x>0$时,

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_x^{+\infty}e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{-x}$$

故ξ的边缘密度为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

当$y>0$时,

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{y}e^{-y}\,\mathrm{d}x=ye^{-y}$$

故η的边缘密度为

$$f_\eta(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

9. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & \text{若 } x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试确定常数c, 并计算各随机变量的边缘概率密度函数.

解: (1)利用二维随机变量密度性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$得,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

其中D为图7中阴影部分面积.得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = & \int_{-1}^{1}\,\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1} cx^2y\,\mathrm{d}y \\ = & \int_{-1}^{1}\tfrac{1}{2}cx^2(1-x^4)\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{21}c = 1\end{aligned}$$

故$c=\frac{21}{4}$.

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f_\xi(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ = & \begin{cases}\int_{-\infty}^{x^2}0\,\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,\mathrm{d}y+\int_{1}^{+\infty}0\,\mathrm{d}y & |x|<1,\\ 0 & |x|\geqslant 1.\end{cases} \\ = & \begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4) & |x|<1,\\ 0 & |x|\geqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_\eta(y) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ = & \begin{cases}\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}}0\,\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\,\mathrm{d}x+\int_{+\sqrt{y}}^{+\infty}0\,\mathrm{d}x & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \\ = & \begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

10. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求条件概率密度函数$f_{\eta|\xi}(y|x), f_{\xi|\eta}(x|y)$.

解:

$$\begin{aligned}f_\xi(x) = & \begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}y+\int_{-x}^{x}1\,\mathrm{d}y+\int_{x}^{+\infty}0\,\mathrm{d}y & 0<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \\ = & \begin{cases}2x & 0<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

当$0<x<1$时, $f_\xi(x)>0$

$$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x} & |y|<x,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f_\eta(y)=&\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ =&\begin{cases}\int_{-\infty}^{-y}0\,\mathrm{d}x+\int_{-y}^{1}1\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}0\,\mathrm{d}x & -1<y<0,\\ \int_{-\infty}^{y}0\,\mathrm{d}x+\int_{y}^{1}1\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}0\,\mathrm{d}x & 0<y<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\\ =&\begin{cases}1+y & -1<y<0,\\ 1-y & 0<y<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

当$-1<y<0$时,

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1+y} & -y<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<y<1$时,

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-y} & y<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

所以当$|y|<1$时,

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|} & |y|<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

综上所述,

$$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x} & |y|<x,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|} & |y|<x<1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

11. 设某袋子中装有1个红球、2个黑球与3个白球. 现有放回从袋中取两次, 每次取一球. 以ξ,η,ζ分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数. 求概率$P(\xi=1|\zeta=0)$和(ξ,η)的联合分布律.

解: (1) $P(\xi=1|\zeta=0)=4/9$ (2)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	1/4	1/3	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/36	0	0

12. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & \text{若}0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求其联合分布函数.

解:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>1\\ y^2 & x>1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1, & x>1, y>1\end{cases}$$

13. 设ξ在$[0,1]$上服从均匀分布, 且对于任意的$x\in\mathbb{R}$, η 的条件概率密度函数为

$$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}x, & \text{若 }0<y<\frac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(ξ,η)的联合概率密度函数和η的边缘概率密度函数.

解: 因为$\xi-U(0,1)$, 即ξ符合均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}=\begin{cases}x & 0<y<\frac{1}{x},\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_{\eta|\xi}(y|x)f_\xi(x),\qquad f_\xi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

所以,

$$f(x,y)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1, 0<y<\frac{1}{x},\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由于概率密度函数仅在图9中阴影部分为非零值.

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

当$1>y>0$时,

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

当$y>1$时,

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{y}} x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2y^2}$$

所以,

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 1>y>0,\\ \frac{1}{2y^2} & y>1,\\ 0 & 其他\end{cases}$$

14. 设随机变量ξ和η相互独立, ξ在$[0,1]$上服从均匀分布, η的概率密度函数为

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-y/2}, & 若\ y>0,\\ 0, & 若\ y\leqslant 0.\end{cases}$$

求(ξ,η)的联合概率密度函数, 并查表计算二次方程$x^2+2\xi x+\eta=0$有实根的概率.

解: (1)由题意可知, ξ在(0,1)上服从均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & 其他\end{cases}$$

利用

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0,\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$$

和ξ和η相互独立得

$$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0,\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(2)二次方程$x^2+2\xi x+\eta=0$有实根, 则$\Delta=(2\xi)^2-4\times1\times\eta\geqslant0$, 即$4\xi^2\geqslant 4\eta, \xi^2\geqslant\eta$.

如图10所示, 概率密度在阴影部分D才具有非零解.

$$\begin{aligned}
P(\xi^2\geqslant\eta) &= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}\tfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})\,\mathrm{d}x\\
&= 1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}[\phi(1)-\phi(0)]\\
&= 1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445
\end{aligned}$$

15. 设ξ和η相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant0,\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}\mu\,\mathrm{e}^{-\mu y}, & 若\ y>0,\\ 0, & 若\ y\leqslant0,\end{cases}$$

其中$\lambda,\mu>0$是常数. 定义随机变量

$$\zeta=\begin{cases}1, & 若\ \xi\leqslant\eta,\\ 0, & 若\ \xi>\eta.\end{cases}$$

求条件概率密度函数$f_{\xi|\eta}(x|y)$和ζ的分布律.

解: (1) $f_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$, 由于$\xi$和$\eta$是相互独立的随机变量,

$$f(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}, & x>0且y>0\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

故

$$f_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

(2)由于

$$\zeta=\begin{cases}1, & 若\ \xi\leqslant\eta\\ 0, & 若\xi>\eta.\end{cases}$$

且

$$\begin{aligned} P(\zeta=1)= & P(\xi\leqslant\eta)=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ = & \int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+\mu)x}\,\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \end{aligned}$$

故$P(\zeta=0)=P(\xi>\eta)=1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. 从而$\zeta$的分布律为

ζ	0	1
P	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$

16. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & 若0<y<x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求条件概率密度函数$f_{\xi|\eta}(x|y)$和条件概率$P(\xi\leqslant 1|\eta\leqslant 1)$.

解: (1)

$$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0<y<x, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(2) $P(\xi\leqslant 1|\eta\leqslant 1)=\frac{e-2}{e-1}$.

17. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 若\ 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

分别求$\xi+\eta$和$\xi\eta$的概率密度函数.

解: 记$\zeta=\xi+\eta$的概率密度为$f_\zeta(z)$

$f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$

已知随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 若\ 0<x<1,0<y<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

在阴影区域中, 概率密度才具有非零值.

当$z\geqslant 2$或$z\leqslant 0$时,$f_\zeta(z)=0$.

当$0\leqslant z\leqslant 2$时,

(i)$0\leqslant z\leqslant 1$时, $f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_0^z z\,\mathrm{d}x+\int_z^{+\infty}0\,\mathrm{d}x=z^2$

(ii)$1\leqslant z\leqslant 2$时, $f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{z-1}0\,\mathrm{d}x+\int_{z-1}^{1} z\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}0\,\mathrm{d}x=z(2-z)$

综上所述,

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z\geqslant 2, z\leqslant 0\\ z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ (2-z)z, & 1\leqslant z\leqslant 2.\end{cases}$$

则$\zeta=\xi\eta$的概率密度为$f'_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x$ 如图13,

阴影区域由

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<\frac{z}{x}<1\end{cases}$$

即$0<z<x$确定.

当$z\geqslant 1$或$z\leqslant 0$时, $f'_\zeta(z)=0$.

当$0<z<1$时, $f'_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{z}0\,\mathrm{d}x+\int_z^1\frac{1}{|x|}(x+\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}0\,\mathrm{d}x=2(1-z)$.

综上所述,

$$f'_\zeta(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

18. 设某商品一周的需求量是随机的, 其概率密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}t\,\mathrm{e}^{-t}, & \text{若 } t>0,\\ 0, & \text{若 } t\leqslant 0.\end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的. 求两周的需求量的概率密度函数.

解: 设某商品在第i周的需求量为$\xi_i(i=1,2,3,\cdots\cdots)$ 由题意可知, 各周的需求量相互独立, 并且有

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

记两周的需求量为z, 即$z=\xi_1+\xi_2$, 则z的概率密度为$f_\xi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x$.

由$f(t)$的定义, 当

$$\begin{cases}x>0\\ z>x.\end{cases}$$

时, 上述积分的被积分函数不等于0.

在阴影部分中, 概率密度才具有非零值.当$z \leqslant 0$时,$f_\zeta(z)=0$. 当$z>0$时,

$$\begin{aligned} f_\zeta(z) &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x + \int_z^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x = e^{-z}\int_0^z x(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{z^3e^{-z}}{3!} \end{aligned}$$

综上所述,

$$f_\zeta(z)=\begin{cases} \frac{z^3e^{-z}}{3!}, & z>0 \\ 0, & z\leqslant 0. \end{cases}$$

19. 设随机变量ξ,η独立同分布, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & \text{若 } x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$\zeta=\eta/\xi$的概率密度函数.

解: 记$\zeta=\frac{\eta}{\xi}$的概率密度为$f_\zeta(z)$. $f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,zx)|x|\,\mathrm{d}x$ 已知随机变量(ξ,η)的概率密度函数均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{若}x>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由$f(x)$的定义,当

$$\begin{cases} x>0 \\ xz>0. \end{cases}$$

时,$f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,zx)|x|\,\mathrm{d}x$ 被积分函数不等于零. 如图15,

在阴影部分中, 概率密度才具有非零值.

当$z\leqslant 0$时,$f_\zeta(z)=0$.

当$z>0$时,$f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} xe^{-x}e^{-zx}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} xe^{-x-zx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(1+z)^2}$.

综上所述,

$$f_\zeta(z)=\begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2}, & z>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

20. 设(ξ,η)在矩形$G=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布. 求边长为ξ和η的矩形的面积S的概率密度函数.

解:

$$f_S(s) = F'_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln s), & 0 < s < 2 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

21. 设随机变量ξ_1、ξ_2相互独立, 且服从$N(0,1)$. 计算$\xi_1^2 + \xi_2^2$的概率密度函数.

解:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases}$$

22. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{若 } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试验证ξ和η是否相互独立, 并计算$\xi + \eta$的概率密度函数.

解: (1)由题意知, 随机变量(ξ,η)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & \text{若} x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

概率密度仅在阴影部分才具有非零值.

当$x \leqslant 0$时, $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.

当$x > 0$时, $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{-x}(x+1)}{2}$

所以,

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}(x+1)}{2}, & \text{若} x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$y \leqslant 0$时, $f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$.

当$y > 0$时,

$$\begin{aligned} f_\eta(y) = & \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x \\ = & \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-y}}{2}(y+1) \end{aligned}$$

即

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}(y+1)}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

$$f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{e^{-(x+y)}(x+1)(y+1)}{4}, & y>0,x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\neq f(x,y)$$

所以, ξ和η不相互独立.

(2)记$\xi+\eta=\zeta$的概率密度为$f_\zeta(z)$. $f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$ 已知随机变量的概率密度, 由定义得, 当

$$\begin{cases}x>0,\\ z>x.\end{cases}$$

时, 上述积分的被积分函数不等于零.

概率密度在阴影部分才具有非零值.

当$z\leqslant 0$时, $f_\zeta(z)=0$.

当$z>0$时,

$$\begin{aligned}f_\zeta(z)=&\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_0^z\frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-x)}\,\mathrm{d}x+\int_z^{+\infty}0\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^z\frac{1}{2}ze^{-z}\,\mathrm{d}x=\frac{z^2}{2}e^{-z}\end{aligned}$$

综上所述,

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{2}e^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

23. 设(ξ,η)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & \text{若}x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求ξ和η的边缘密度函数, ξ和η的条件密度函数, 并验证ξ和η是否相互独立.

解: (1) ξ和η是相互对称的,

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & -R\leqslant x\leqslant R\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2} & -R\leqslant y\leqslant R\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $\xi|\eta$ 同$\eta|\xi$也是对称的

$$f_\xi|\eta(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & |x|\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_\eta|\xi(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |y|\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3) 由于$f(x,y)\neq f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, 所以$\xi,\eta$不是相互独立的.

24. 设随机变量ξ与η相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1, & 若0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}A\,\mathrm{e}^{-y}, & 若y>0,\\ 0, & 若y\leqslant 0.\end{cases}$$

试确定常数A, 并求随机变量$2\xi+\eta$的概率密度函数.

解: (1) $A=1$,

(2)

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-\ \mathrm{e}^{-z})/2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ (\,\mathrm{e}^2-1)\,\mathrm{e}^{-z}/2 & z\geqslant 2\end{cases}$$

25. 设随机变量ξ与η相互独立. 其中, ξ的分布律和η的概率密度函数分别为

$$P(\xi=i)=\frac{1}{3},\quad i=-1,0,1;\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}1, & 若0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

记$\zeta=\xi+\eta$. 求概率$P(\zeta\leqslant\frac{1}{2}|\xi=0)$, 并计算$\zeta$的概率密度函数.

解: (1) $P(\zeta\leqslant\frac{1}{2}|\xi=0)=\frac{1}{2}$

(2)

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1\leqslant z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

26. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}b\,\mathrm{e}^{-(x+y)}, & 若\ 0<x<1, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试确定常数b, 并求边缘概率密度函数$f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$和函数$\max\{\xi,\eta\}$的分布函数.

解: (1) 利用随机变量密度函数性质: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$. 由随机变量$(\xi,\eta)$的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 若0<x<1, 0<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

得, $\int_0^1\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$ 解之得, $\int_0^1 be^{-x}\,\mathrm{d}x=1$

$b=\frac{e}{e-1}$

(2)$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 如图18,

概率密度只有在阴影部分才具有非零值.

当$x\geqslant 1$和$x\leqslant 0$时, $f_\xi(x)=0$.

当$0<x<1$时, $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{e}{e-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}$

所以,

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 若0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

当$y\leqslant 0$时, $f_\eta(y)=0$.

当$y>0$时,

$$\begin{aligned}f_\eta(y)=&\int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{e}{e-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}0\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^1\frac{e}{e-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x=e^{-y}\end{aligned}$$

综上得,

$$f_\eta(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned}F_\zeta(z)=&P(\zeta\leqslant z)=P(\max\{\xi,\eta\}\leqslant z)=P(\xi\leqslant z,\eta\leqslant z)\\ =&\int_{-\infty}^z\int_{-\infty}^z f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当$z\leqslant 0$时, $F_\zeta(z)=0$.

当$0<z\leqslant 1$时, $F_\zeta(z)=\int_0^z\int_0^z\frac{e}{e-1}e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{(1-e^{-z})^2}{1-e^{-1}}$

当$z\geqslant 1$时, $F_\zeta(z)=\int_0^1\int_0^z\frac{e}{e-1}e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-e^{-z}$.

综上所述,

$$f_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{(1-e^{-z})^2}{1-e^{-1}}, & 0<z\leqslant 1,\\ 1-e^{-z}, & z>1.\end{cases}$$

27. 设随机变量ξ,η相互独立, 且分别在区间$(0,1)$与$(0,2)$上服从均匀分布. 求$\max(\xi,\eta)$与$\min(\xi,\eta)$的概率密度函数.

解: (1)

$$f_U(u)=\begin{cases} u, & 0<u<1\\ 1/2, & 1\leqslant u<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2)

$$f_V(v)=\begin{cases} \frac{3}{2}-v & 0<v<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

28. 设某批电子元件的寿命(以小时计) 近似地服从$N(160,20^2)$分布. 今从中随机地抽取4件. 求被抽中元件的寿命均高于180的概率.

解: 以$\xi_i(i=1,2,3,\cdots\cdots)$ 记所选取的第i只元件的寿命, 由题意可知, 随机变量服从$\xi_i\sim N(160,20^2)$的分布. 设一只元件寿命小于180小时的概率为

$$P(\xi_i\leqslant 180)=P(\frac{\xi_i-160}{20}\leqslant\frac{180-160}{20})=\phi(\frac{180-160}{20})=\phi(1)=0.8413$$

由题意可知, ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4相互独立.

故随机选取4只, 其中没有一只寿命小于180小时的概率为

$$P=(1-0.8413)^4=0.00063.$$

29. 设随机变量ξ,η相互独立, 且服从同一分布. 对$a\leqslant b$, 证明

$$P(a<\min\{\xi,\eta\}\leqslant b)=[P(\xi>a)]^2-[P(\xi>b)]^2.$$

解: 由题意可知, η、ξ相互独立, 且服从同一分布. 以$F(x)$记它们的分布函数, 又记$N=\min\{\xi,\eta\}$的分布函数为$F_N(z)$.

$$\begin{aligned} F_N(z)= & \ P(N\leqslant z)=P(\min\{\xi,\eta\}\leqslant z)\\ = & \ 1-P(\min\{\xi,\eta\}>z)\\ = & \ 1-P(\xi>z)P(\eta>z)\\ = & \ 1-[1-P(\xi\leqslant z)][1-P(\eta\leqslant z)]\\ = & \ 1-[1-F(z)]^2\end{aligned}$$

于是, $P(a<\min\{\xi,\eta\}\leqslant b)=F_N(b)-F_N(a)=[1-F(a)]^2-[1-F(b)]^2$

因为$P(\xi > a) = 1 - P(\xi \leqslant a) = 1 - F(a)$

$P(\eta > b) = 1 - P(\eta \leqslant b) = 1 - F(b)$

所以,

$$\begin{aligned} P(a < \min\{\xi,\eta\} \leqslant b) = & \ [1-F(a)]^2 - [1-F(b)]^2 \\ = & \ [P(\xi > a)]^2 - [P(\eta > b)]^2. \end{aligned}$$

30. 设ξ,η相互独立, 且$\xi \sim b(m,p), \eta \sim b(n,p)$. 证明$\xi+\eta \sim b(m+n,p)$.

31. 设随机变量(ξ,η)的分布律为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

求(1) $P(\xi = 2|\eta = 2), P(\eta = 3|\xi = 0)$; (2) $\max\{\xi,\eta\}$的分布律; (3) $\min\{\xi,\eta\}$的分布律; (4) $\xi+\eta$的分布律.

解: (1)

$$P(\eta = 2) = \sum_{i=0}^{5} P(\xi = i, \eta = 2) = 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.04 = 0.16$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = 0.05$$

所以,

$P(\xi = 2|\eta = 2) = \frac{P(\xi=2,\eta=2)}{P(\eta=2)} = \frac{0.05}{0.16} = \frac{5}{16}$

$P(\xi = 0) = \sum\limits_{j=0}^{3} P(\xi = 0, \eta = j) = 0.00 + 0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.07 + 0.09 = 0.25$

$P(\eta = 3|\xi = 0) = 0.05$

则有, $P(\eta = 3|\xi = 0) = \frac{P(\eta=3|\xi=0)}{P(\xi=0)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2$

(2)

(ξ,η)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
$\max\{\xi,\eta\}$	0	1	2	3	4	5	1	1	2	3	4
P	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06

$(1,5)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$
5	2	2	2	3	4	5	3	3	3	3	4	5
0.08	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

所以, $\mu = \max\{\xi, \eta\}$的分布律为

$\mu = \max\{\xi, \eta\}$	0	1	2	3	4	5
P	0.00	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3)

(ξ, η)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	(13)	$(1,4)$
$\min\{\xi, \eta\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
P	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06

$(1,5)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$
1	0	1	2	2	2	2	0	1	2	3	3	3
0.08	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

所以, $\nu = \min\{\xi, \eta\}$的分布律为

$\nu = \min\{\xi, \eta\}$	0	1	2	3
P	0.28	0.30	0.25	0.17

(4)

(ξ, η)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	(13)	$(1,4)$
$\xi + \eta$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
P	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06

$(1,5)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$
6	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8
0.08	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

所以, $\omega = \xi + \eta$的分布律为

$\omega = \xi + \eta$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.00	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

第 4 章

随机变量的数字特征

1. 设某产品的次品率为0.1, 检验员每天抽检4次, 每次抽取10件产品进行检验. 如每次抽检中次品的件数多于1, 就去调整设备. 用ξ表示一天中调整设备的次数, 求$E\xi$.

解: 先求检验一次, 决定需要调整设备的概率, 设检验出次品数为η, 则$\eta \sim b(10, 0.1)$. 记需调整设备一次的概率为P. 则

$$P = P(\eta > 1) = 1 - P(\eta = 0) - P(\eta = 1),$$

因为

$$P(\eta = 0) = C_{10}^{0}(0.1)^{0}(1.9)^{10} = (0.9)^{10},$$

$$P(\eta = 1) = C_{10}^{1}(0.1)^{1}(1.9)^{9} = (0.9)^{9},$$

所以

$$P = P(\eta > 1) = 1 - (0.9)^{10} - (0.9)^{9} = 0.2639.$$

又因为各次检验结果相互独立, 故$\xi \sim b(4, 0.2639)$, ξ表示一天中调整设备的次数, 即ξ的分布律

ξ	0	1	2	3	4
P	$(1-P)^4$	$C_4^1P^1(1-P)^3$	$C_4^2P^2(1-P)^2$	$C_4^3P^3(1-P)^1$	$C_4^1P^4(1-P)^0$

整理得

ξ	0	1	2	3	4
P	$(1-P)^4$	$4P(1-P)^3$	$6P^2(1-P)^2$	$4P^3(1-P)$	P^4

所以$E(\xi) = 0 \times (1-P)^4 + 1 \times 4P(1-P)^3 + 2 \times 6P^2(1-P)^2 + 3 \times 4P^3(1-P) + 4 \times P^4 = 4 \times 0.2639 = 1.0556$

利用$E\xi = nP$得$\xi \sim b(4, 0.2639)$.

2. 设随机变量ξ的分布律为

ξ	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求$E\xi$, $E\xi^2$, $E(3\xi^2+5)$.

解: 利用ξ的分布律, 可得ξ^2, $3\xi^2+5$的分布律分别为:

ξ	-2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

ξ^2	4	0
P_k	0.7	0.3

$3\xi^2+5$	5	17
P_k	0.3	0.7

所以,

$$\begin{aligned} &E\xi = -2\times 0.4 + 0\times 0.3 + 2\times 0.3 = -0.2, \\ &E\xi^2 = 4\times 0.7 + 0\times 0.3 = 2.8, \\ &E(3\xi^2+5) = 5\times 0.3 + 17\times 0.7 = 13.4. \end{aligned}$$

3. 设随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & 若\ x > 0, \\ 0, & 若\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

分别求2ξ和$\mathrm{e}^{-2\xi}$ 的数学期望.

解: (1)$E\eta = E(2\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$;

(2)$E\eta = E(e^{-2x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

4. 设随机变量η服从参数为$\lambda = 1$的指数分布. 对$k = 1, 2$, 定义随机变量

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & 若\eta \leqslant k, \\ 1, & 若\eta > k. \end{cases}$$

求(ξ_1, ξ_2)的联合分布律和$E(\xi_1+\xi_2)$.

解: (1) ξ_1和ξ_2的联合分布律为

$\xi_1 \backslash \xi_2$	0	1
0	$1-\mathrm{e}^{-1}$	0
1	$\mathrm{e}^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

(2) $E(\xi_1+\xi_2) = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2}$.

5. 设随机变量ξ的概率分布为$P(\xi=1)=P(\xi=2)=1/2$, 而在$\xi=i$的条件下, 随机变量η在区间$(0,i)$上服从均匀分布, $i=1,2$. 求η的分布函数和数学期望.

解: (1) 随机变量η的概率密度函数为

$$f_\eta(y)=\begin{cases}3/4, & 0<y<1\\ 1/4, & 1\leqslant y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $E(\eta)=3/4$.

6. 二维随机变量(ξ,η)的分布律见右表. 分别计算$E\xi$, $E\eta$, $E(\xi/\eta)$, $E(\xi-\eta)^2$.

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

解: 关于ξ的边缘分布律

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

$E(\xi)=(-1)\times 0.3+0\times 0.4+1\times 0.3=0$

关于η的边缘分布律

η	1	2	3
P	0.4	0.2	0.4

$E(\eta)=1\times 0.4+2\times 0.2+3\times 0.4=2.$

(ξ,η)	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-1,3)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
ξ/η	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$(\xi-\eta)^2$	4	9	16	1	4	9	0	1	4
P	0.2	0.1	0	0.1	0	0.3	0.1	0.1	0.1

可得ξ/η的分布律:

ξ/η	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
P	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(\xi/\eta)=(-1)\times 0.2+(-\frac{1}{2})\times 0.1+1\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{3}\times 0.1=-\frac{1}{15}.$

$(\xi-\eta)^2$的分布律:

$(\xi-\eta)^2$	0	1	4	9	16
P	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E(\xi-\eta)^2 = 0\times 0.1 + 1\times 0.2 + 4\times 0.3 + 9\times 0.4 + 16\times 0 = 5.$

7. 设(ξ,η)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & \text{若 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求$E\xi$, $E\eta$, $E\xi\eta$, $E(\xi^2+\eta^2)$.

8. 设连续型随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & \text{若} 0<x<2,\\ cx+b, & \text{若} 2\leqslant x<4,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

其中$E\xi=2, P(1<\xi<3)=3/4$. 求常数a,b,c的值, $\eta=\mathrm{e}^{\xi}$的数学期望与方差.

解: (1) $a=1/4, b=1, c=-1/4$.

(2) $E(\eta)=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2-1)^2, D(\eta)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2(\mathrm{e}^2-1)^2$.

9. 设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立, 其中ξ_1在区间$[0,1]$ 上服从均匀分布, ξ_2服从正态分布$N(0,2^2)$, ξ_3服从参数为3的泊松分布. 求$E(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)^2$.

解:

$$\begin{aligned} E[(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)^2] = &\ D(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)+[E(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)]^2\\ = &\ 517/12+(19/2)^2=400/3.\end{aligned}$$

10. 一工厂生产的某种设备的寿命ξ服从指数分布, 概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}, & \text{若 } x>0,\\ 0, & \text{若 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

工厂规定, 出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备盈利100元, 调换一台设备厂方需花费300元. 求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

解: 设出售一台设备盈利y元.

y	100	$100-300$
P	$P(\xi>1)$	$P(\xi\leqslant 1)$

$$\begin{aligned} P(\xi\leqslant 1)= &\ \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ = &\ \int_0^1 \frac{1}{4}e^{-x/4}\,\mathrm{d}x = 1-e^{-\frac{1}{4}} \\ P(\xi>1)= &\ 1-P(\xi\leqslant 1)=e^{-\frac{1}{4}}, \\ E= &\ 100\times e^{-\frac{1}{4}}+(100-300)\times(1-e^{-\frac{1}{4}}) \\ = &\ 300e^{-\frac{1}{4}}-200=33.64., \end{aligned}$$

即厂方出售一台设备净盈利的数学期望为33.64元.

11. 设某批圆盘的直径在区间(a,b)上服从均匀分布. 求圆盘面积的数学期望.

解: 已知车间生产的圆盘直径在区间$[a,b]$上服从均匀分布. 令圆盘直径为随机变量ξ,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{否则}; \end{cases}$$

令圆盘的面积为S, $S=2\pi(\frac{\xi}{2})^2$

$$\begin{aligned} E(S)= &\ E[2\pi(\tfrac{\xi}{2})^2]=E(\tfrac{\pi}{2}\xi^2) \\ = &\ \tfrac{\pi}{2}E(\xi^2)=\tfrac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ = &\ \tfrac{\pi}{2}\int_a^b x^2\tfrac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi(b^3-a^3)}{6(b-a)}. \end{aligned}$$

12. 设随机变量ξ、η的概率密度函数分别为

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2x}, & \text{若 } x>0, \\ 0, & \text{若 } x\leqslant 0, \end{cases} \qquad f_\eta(y)=\begin{cases} 4\,\mathrm{e}^{-4y}, & \text{若 } y>0, \\ 0, & \text{若 } y\leqslant 0. \end{cases}$$

求$E(\xi+\eta)$, $E(2\xi-3\eta)$, 并在ξ,η相互独立的条件下计算$E(\xi\eta)$.

解: (1)依题意可知,

$$\begin{aligned} E\xi_1= &\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x2e^{-2x}\,\mathrm{d}x=(-xe^{-2x})|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}, \\ E\xi_2= &\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf_2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x4e^{-4x}\,\mathrm{d}x=(-xe^{-4x})|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{4}, \\ E\xi_2^2= &\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^2 4e^{-4x}\,\mathrm{d}x=(-x^2e^{-4x})|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} 2xe^{-4x}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{8}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(\xi_1+\xi_2)= &\ E(\xi_1)+E(\xi_2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4}, \\ E(2\xi_1-3\xi_2^2)= &\ 2E(\xi_1)-3E(\xi_2^2)=2\times\tfrac{1}{2}-3\times\tfrac{1}{8}=\tfrac{5}{8}. \end{aligned}$$

(2) 因为ξ_1,ξ_2相互独立, 由数学期望的性质可知:

$$E(\xi_1\xi_1)=E\xi_1E\xi_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

13. 用n把外形基本相同的钥匙试开门上的锁, 其中只有一把能打开. 设每把钥匙等可能地被抽到, 且每把钥匙试开一次后除去. 求试开次数ξ的分布律和数学期望.

解: 依题意可知, 每把钥匙试开一次后便除去, 则试开次数ξ的所有可能取值为$1,2,\cdots,n$, 再由取到, 每只钥匙是等可能的可知:

$$\begin{aligned}
P(\xi=1)= &\ \tfrac{1}{n},\\
P(\xi=2)= &\ \tfrac{n-1}{n}\times\tfrac{1}{n-1}=\tfrac{1}{n},\vdots\\
P(\xi=k)= &\ \tfrac{n-1}{n}\times\tfrac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\tfrac{n-k+1}{n-k+2}\times\tfrac{1}{n-k+1}\tfrac{1}{n},\\
&\ \vdots\\
P(\xi=n)= &\ \tfrac{n-1}{n}\times\tfrac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\tfrac{1}{2}\times 1=\tfrac{1}{n},
\end{aligned}$$

即ξ的分布律为

ξ	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

所以

$$\begin{aligned}
E(\xi)= &\ 1\times\tfrac{1}{n}+2\times\tfrac{1}{n}+\cdots+k\times\tfrac{1}{n}+\cdots+n\times\tfrac{1}{n}\\
= &\ \tfrac{1}{n}(1+2+\cdots+k+\cdots+n)=\tfrac{1+n}{2}.
\end{aligned}$$

14. 今有10个人随机地进入15个房间, 每个房间容纳的人数不限. 设每个人进入每个房间是等可能的, 且各人是否进入房间是独立的. 令ξ表示有人的房间数, 求$E\xi$.

解: $E(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{15}=15[1-(14/15)^{10}]=7.476$

15. 对任意随机变量ξ和任意常数$c\neq E\xi$, 证明$D\xi<E(\xi-c)^2$.

解:

$$\begin{aligned}
E(\xi-C)^2 &= E(\xi^2-2\xi C+C^2)\\
&= E(\xi^2)-2CE(\xi)+C^2\\
&= [C-E(\xi)]^2+E\xi^2-(E\xi)^2\\
&= [C-E(\xi)]^2+D(\xi)
\end{aligned}$$

由于$[C-E(\xi)]^2\geqslant 0$, 故$C\neq E\xi$时, $D(\xi)<E(\xi-C)^2$.

16. 设连续型随机变量ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}, & 若\ x>0, \\ 0, & 若\ x\leqslant 0, \end{cases}$$

其中$\sigma>0$是常数. 求$E\xi$, $D\xi$.

解:

$$\begin{aligned} E(\xi)= &\ \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} x\frac{x}{\sigma^2}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2}-\frac{\sigma^2}{x}de^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} -xde^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ -xe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty}+\textstyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{x\to\infty} -xe^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}$ 利用洛必达法则,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)'}{(e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}\frac{\sigma^2}{x}=0,$$

得

$$E\xi=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

又因为$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$, 即$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ 令$\frac{x}{\sigma}=t$.

所以$E\xi=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}d\sigma t=\sigma\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$\begin{aligned} E\xi^2= &\ \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} x^2\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2}(-\frac{\sigma^2}{x})de^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} -x^2de^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ -x^2e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty}+\textstyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x^2 \end{aligned}$$

同理, 利用洛必达法则, $\lim_{x\to\infty} -x^2 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} = 0$, 所以

$$\begin{aligned} E(\xi^2) = &\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x^2 \\ = &\ \int_0^{+\infty} 2xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\ = &\ \int_0^{+\infty} 2x(-\tfrac{\sigma^2}{x})de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ -2\sigma^2 \int_0^{+\infty} de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ = &\ -2\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty} = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

所以$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2\sigma^2 - (\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

17. 设随机变量ξ服从$\mathit{\Gamma}$分布, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \mathit{\Gamma}(\alpha)} x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x/\beta}, & \text{若 } x > 0, \\ 0, & \text{若 } x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中$\alpha > 0, \beta > 0$是常数. 求$E\xi$, $D\xi$.

解:

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x\tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^\alpha(-\beta)de^{-x/\beta} \\ &= \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}[x^\alpha(-\beta)e^{-x/\beta}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/\beta}\beta\,\mathrm{d}x^\alpha] \end{aligned}$$

利用洛必达法则$\lim_{x\to\infty} x^\alpha(-\beta)e^{-x/\beta} = 0$, 所以

$$E\xi = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-x/\beta}\beta\alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha\beta\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x$$

根据概率密度函数的性质$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = 1,$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = \beta^\alpha\Gamma(\alpha)$$

故

$$E\xi = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha\beta\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha\beta[\beta^\alpha\Gamma(\alpha)] = \alpha\beta$$

$$\begin{aligned}
E\xi^2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
= & \int_0^{+\infty} x^2 \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x \\
= & \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x \\
= & \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}(-\beta)de^{-x/\beta} \\
= & \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}[x^{\alpha+1}(-\beta)e^{-x/\beta}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x/\beta}\beta\,\mathrm{d}x^{\alpha+1}] \\
= & \tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \beta e^{-x/\beta}(\alpha+1)x^\alpha\,\mathrm{d}x \\
= & \tfrac{\beta(\alpha+1)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由$E(\xi)$的计算得,

$$E\xi = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta,$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = \alpha\beta[\beta^\alpha\Gamma(\alpha)],$$

所以

$$E\xi^2 = \frac{\beta(\alpha+1)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta(\alpha+1)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha\beta[\beta^\alpha\Gamma(\alpha)] = \alpha(\alpha+1)\beta^2,$$

故

$$D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

18. 设随机变量ξ服从几何分布, 其分布律为

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$$

其中$0 < p < 1$是常数. 求$E\xi$, $D\xi$.

解:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}k = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}k,$$

$k=1,2,\cdots$ 令$1-p=q$, 则$E(\xi)=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$.

$$\begin{aligned} S(q) = & \sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=[\int_0^q S(x)\,\mathrm{d}x]'_q \\ = & [\int_0^q\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\,\mathrm{d}x]'_q \\ = & [\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^q kx^{k-1}\,\mathrm{d}x]'_q=[\sum_{k=1}^{\infty}q^k]'_q \\ = & (\tfrac{q}{1-q})'_q=\tfrac{1}{(1-q)^2}=\tfrac{1}{p^2} \end{aligned}$$

所以$E\xi=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$.

$$\begin{aligned} E\xi^2 = & \sum_{k=1}^{\infty}k^2P(\xi=k) \\ = & \sum_{k=1}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1} \\ = & p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

令$1-P=q$, 则$E(\xi^2)=P\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}$

$$\begin{aligned} S(q) = & \sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}=[\int_0^q S(x)\,\mathrm{d}x]'_q=[\int_0^q\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}\,\mathrm{d}x]'_q \\ = & [\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^q k^2x^{k-1}\,\mathrm{d}x]'_q=[\sum_{k=1}^{\infty}kq^k]'_q \\ = & [q\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]'_q \end{aligned}$$

由计算$E(\xi)$的过程可知, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$, 所以

$$S(q)=[q\frac{1}{(1-q)^2}]'_q=\frac{(1-q)^2-q(-2+2q)}{(1-q)^4}=\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{2-p}{p^3}$$

所以$E(\xi^2)=P\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{2-p}{p^3}=\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{2-p}{p^2}$, 即

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{2-p}{p^2}-(\frac{1}{p})^2=\frac{1-q^2}{(1-q)^4}=\frac{1-p}{p^2}.$$

19. 设随机变量ξ,η相互独立, 且都服从均值为0, 方差为$\frac{1}{2}$的正态分布. 求随机变量$|\xi-\eta|$的方差.

解: $D(|\xi-\eta|)=E[(\xi-\eta)^2]-[E(|\xi-\eta|)]^2=1-2/\pi$

20. 设二维随机变量(ξ,η)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \text{若 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试验证ξ和η不相关, 但不相互独立.

解: 已知二维随机变量(ξ,η)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \text{若}x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

关于ξ的边缘密度函数为

$$\begin{aligned}f(x,y)= &\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\\ = &\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\end{aligned}$$

关于η的边缘密度函数为

$$\begin{aligned}f(x,y)= &\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\\ = &\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\end{aligned}$$

则, $f(x,y)\neq f_\xi(x)f_\eta(y)$即$\xi$和$\eta$不相互独立.

$$\begin{aligned}E(\xi)= &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ = &\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\frac{\rho\cos\theta}{\pi}d\rho=0\\ E(\xi)= &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ = &\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\frac{\rho\sin\theta}{\pi}d\rho=0\\ E(\xi\eta)= &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}xy\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ = &\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\frac{\cos\theta\sin\theta}{\pi}\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{\pi}\cos\theta\sin\theta d\rho\\ = &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\rho^4|_0^1)\sin\theta\cos\theta d\theta\\ = &\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta=0\end{aligned}$$

即$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$, 因为$\rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=0$, 所以$\xi$和$\eta$不相关.

21. 设随机变量η 在区间$[0,2\pi]$上服从均匀分布. 令

$$\xi_1=\sin\eta,\ \xi_2=\cos\eta.$$

求ξ_1,ξ_2的相关系数.

解: $E(\xi_1\xi_2)=E(\sin\eta\cos\eta)=0, E(\xi_1)=E(\xi_2)=0$, 从而$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$, 即$\rho_{\xi_1\xi_2}=0$

22. 设随机变量(ξ,η)的分布律见右表. 验证ξ和η不相关, 但不相互独立.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

解: 依题意可知, 关于ξ的边缘分布律为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

$E(\xi)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0.$

关于η的边缘分布律为

η	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

$E(\eta)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0.$

(ξ,η)	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$\xi\eta$	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以$\xi\eta$的分布律为:

$\xi\eta$	-1	0	1
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

$E(\xi\eta)=-1\times\frac{2}{8}+0\times\frac{4}{8}+1\times\frac{2}{8}=0$, 即$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$,

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=0,$$

所以ξ和η是不相关的.

因为$P(\xi=0)=\frac{2}{8}$, $P(\eta=0)=\frac{2}{8}$, $P(\xi=0,\eta=0)=0$, 所以$P(\xi=0,\eta=0)\neq P(\xi=0)P(\eta=0)$, 即$\xi$和$\eta$不相互独立.

23. 设事件A、B满足$P(A)>0,P(B)>0$. 定义随机变量

$$\xi=\begin{cases}1, & 若A发生,\\ 0, & 若A不发生.\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}1, & 若B发生,\\ 0, & 若B不发生.\end{cases}$$

试证明: 若$\rho_{\xi\eta}=0$, 则ξ和η相互独立.

解: 随机变量ξ,η的分布律分别为:

ξ	1	0
P	$P(A)$	$1-P(A)$

η	1	0
P	$P(B)$	$1-P(B)$

故

$$E\xi=P(A),\qquad E\eta=P(B).$$

利用$\rho_{\xi\eta}=0$, $\rho_{\xi\eta}\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ 得, $E\xi\eta=E\xi E\eta$. 所以,

(ξ,η)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$\xi\eta$	0	1	0	0
P	$P(A\overline{B})$	$P(AB)$	$P(\overline{AB})$	$P(\overline{A}B)$

$E(\xi\eta)=P(AB)$即$E(\xi\eta)=P(AB)=P(A)P(B)$可得, A事件与B事件相互独立, 进而得到事件A与$\overline{B}$、事件$\overline{A}$与B、事件$\overline{A}$与$\overline{B}$ 分别相互独立.

$P(\xi=0,\eta=0)=P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})$

$P(\xi=0,\eta=1)=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$

$P(\xi=1,\eta=0)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

$P(\xi=1,\eta=1)=P(AB)=P(A)P(B)$

表1

$\eta\setminus\xi$	0	1
0	$[1-P(A)][1-P(B)]$	$P(A)[1-P(B)]$
1	$[1-P(A)]P(B)$	$P(A)P(B)$

可得出$P(\xi=0,\eta=0)=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\xi=0)P(\eta=0)$

即ξ和η相互独立.

24. 设A,B为两个随机事件, 且$P(A)=1/4,P(B|A)=1/3,P(A|B)=1/2$. 令

$$\xi=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生},\\ 0, & \text{若}A\text{不发生},\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{发生},\\ 0, & \text{若}B\text{不发生}.\end{cases}$$

求随机变量(ξ,η)的分布律, ξ与η的相关系数.

解: (1) 随机变量(ξ,η)的分布律为

$\xi \setminus \eta$	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

(2) $\rho_{\xi\eta}=\sqrt{15}/15$.

25. 设随机变量U服从二项分布$b(2,\frac{1}{2})$. 定义随机变量

$$\xi=\begin{cases}-1, & \text{若}U\leqslant 0,\\ 1, & \text{若}U>0.\end{cases}\qquad \eta=\begin{cases}-1, & \text{若}U<2,\\ 1, & \text{若}U\geqslant 2.\end{cases}$$

求随机变量$\xi-\eta$与$\xi+\eta$的方差和ξ与η的协方差.

解: (1) $D(\xi-\eta)=D(\xi)-2\mathrm{cov}(\xi,\eta)+D(\eta)=1,D(\xi+\eta)=D(\xi)+2\mathrm{cov}(\xi,\eta)+D(\eta)=2$, (2)$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=1/4$

26. 设(ξ,η)在区域$G=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布. 令

$$U=\begin{cases}0, & \text{若}\xi\leqslant\eta,\\ 1, & \text{若}\xi>\eta,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & \text{若}\xi\leqslant 2\eta,\\ 1, & \text{若}\xi>2\eta.\end{cases}$$

求U和V的联合分布律和U与V的相关系数.

解: (1) (U,V)只可能取4个值分别为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$对应概率分别为

$U \backslash V$	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

(2) $\rho_{UV} = 1/\sqrt{3}$.

27. 设(ξ,η)的联合分布律如右表.

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

求$P(\xi = 2\eta)$和$\mathrm{cov}(\xi-\eta,\eta)$.

解: (1) 1/4, (2) $-2/3$

28. 设随机变量(ξ,η)具有概率密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 若\ 0 \leqslant x,y \leqslant 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求$E\xi$, $E\eta$, $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, $\rho_{\xi\eta}$, $D(\xi+\eta)$.

解:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 \frac{x(x+y)}{8}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 (\frac{x^2}{8}+\frac{xy}{8})\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \frac{x}{8}[(xy+\frac{y^2}{2})|_0^2]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x^2+x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2}{2})|_0^2 = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

由ξ和η的对称性可知, $E(\eta)^2 = \frac{5}{3}$.

所以, $D(\xi) = D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{5}{3} - (\frac{7}{6})^2 = \frac{11}{36}$

$$
\begin{aligned}
E(\xi\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 \frac{xy(x+y)}{8}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \frac{x}{8}[(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3})|_0^2]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}(\frac{1}{4}x^4+\frac{x^3}{3})|_0^2 \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi,\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{4}{3} - \frac{7}{6}\times\frac{7}{6} = -\frac{1}{36}$

所以$\rho(\xi\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\sqrt{\frac{11}{36}}} = -\frac{1}{11}$

$$
\begin{aligned}
D(\xi+\eta) &= D(\xi)+D(\eta)+2\mathrm{cov}(\xi,\eta) \\
&= \frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times\frac{-1}{36} = \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

29. 设$\xi \sim N(\mu,\sigma^2),\eta \sim N(\mu,\sigma^2)$, 且相互独立. 对非零常数$\alpha,\beta$, 计算$\zeta_1 = \alpha\xi + \beta\eta$和$\zeta_2 = \alpha\xi - \beta\eta$的相关系数.

解: 由题意可知, $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\eta \sim N(\mu,\sigma^2)$, 且$\xi,\eta$相互独立, 得

$E(\xi)=\mu$, $D(\xi)=\sigma^2$, 即$E(\xi^2)=D(\xi)+E^2(\xi)=\sigma^2+\mu^2$

$E(\eta)=\mu$, $D(\eta)=\sigma^2$, 即$E(\eta^2)=D(\eta)+E^2(\eta)=\sigma^2+\mu^2$

$E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)=\mu^2$

ζ_1和ζ_2的相关系数为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\zeta_1,\zeta_2) &= E(\zeta_1\zeta_2)-E(\zeta_1)E(\zeta_2) \\
&= E[(\alpha\xi+\beta\eta)(\alpha\xi-\beta\eta)] - E(\alpha\xi+\beta\eta)E(\alpha\xi-\beta\eta) \\
&= E(\alpha^2\xi^2-\alpha\beta\xi\eta+\alpha\beta\xi\eta-\beta^2\eta^2) - [E(\alpha\xi)+E(\beta\eta)]\times[E(\alpha\xi)-E(\beta\eta)] \\
&= \alpha^2E(\xi^2)-\beta^2E(\eta^2)-[E^2(\alpha\xi)-E^2(\beta\eta)] \\
&= \alpha^2E(\xi^2)-\beta^2E(\eta^2)-E^2(\alpha\xi)+E^2(\beta\eta) \\
&= \alpha^2[E(\xi^2)-E^2(\xi)]-\beta^2[E(\eta^2)-E^2(\eta)] \\
&= \alpha^2D(\xi)-\beta^2D(\eta) \\
&= \alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2 \\
&= (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

又因为$\sqrt{D(\zeta_1)}=\sigma$, $\sqrt{D(\zeta_2)}=\sigma$

所以

$$\begin{aligned}\rho_{\zeta_1\zeta_2} &= \frac{\text{cov}(\zeta_1,\zeta_2)}{\sqrt{D(\zeta_1)}\sqrt{D(\zeta_2)}} \\ &= \frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sigma^2} = \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

30. (1) 设$\zeta=(a\xi+3\eta)^2$, $E\xi=E\eta=0$, $D\xi=4$, $D\eta=16$, $\rho_{\xi\eta}=-0.5$. 求常数a使$E\zeta$最小, 并求$E\zeta$的最小值.

(2) 设(ξ,η)服从二维正态分布, 且$D(\xi)=\sigma_\xi^2, D(\eta)=\sigma_\eta^2$. 证明当$a^2=\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2$时随机变量$\zeta=\xi-a\eta$与$\omega=\xi+a\eta$相互独立.

解: (1)

$$\begin{aligned}E(\zeta) &= E[(\alpha a\xi+3\eta^3)] = E(a^2\xi^2+a\xi\eta+9\eta^2) \\ &= a^2E(\xi^2)+6aE(\xi\eta)+9E(\eta^2)\end{aligned}$$

因为$D(\xi)=4, D(\eta)=16, E(\xi)=E(\eta)=0$

$E(\xi^2)=D(\xi)+E^2(\xi)=4,\ E(\eta^2)=D(\eta)+E^2(\eta)=16$

$$\begin{aligned}E(\xi\eta) &= \text{cov}(\xi,\eta)+E(\xi)E(\eta) \\ &= \rho_{\xi\eta}\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_\eta}+E_\xi E_\eta \\ &= -0.5\times 2\times 4+0=-4\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E(\zeta) &= a^2\times 4+6a\times(-4)+9\times 16 \\ &= 4a^2-24a+144 \\ &= 4(a^2-6a+9)-36+144 \\ &= 4(a-3)^2+108\end{aligned}$$

当且仅当$a=3$时, $E(\zeta)$取得最小值, 为108.

(2). 证明: 设(ξ,η)服从二维正态分布$N(\mu_\xi,\sigma_\xi^2,\mu_\eta,\sigma_\eta^2,\rho)$

依题意可知$\zeta=\xi-a\eta$与$\omega=\xi+a\eta$也服从正态分布, 且

$$E\zeta=E(\xi-a\eta)=E(\xi)-aE(\eta)=\mu_\xi-a\mu_\eta$$
$$E\omega=E(\xi+a\eta)=E(\xi)+aE(\eta)=\mu_\xi+a\mu_\eta$$

$$
\begin{aligned}
D\zeta = &\; D(\xi - a\eta) = D(\xi) + a^2 D(\eta) - 2\mathrm{cov}(\xi, \eta) \\
= &\; \sigma_\xi^2 + a\sigma_\eta^2 - 2\rho_{\xi\eta}.\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)} \\
= &\; \sigma_\xi^2 + a\sigma_\eta^2 - 2\rho\sigma_\xi\sigma_\eta \\
D\omega = &\; D(\xi + a\eta) = D(\xi) + a^2 D(\eta) + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta) \\
= &\; \sigma_\xi^2 + a\sigma_\eta^2 + 2\rho\sigma_\xi\sigma_\eta \\
E(\zeta\omega) = &\; E[(\xi - a\eta)(\xi + a\eta)] = E(\xi^2 + a\xi\eta - a\xi\eta - a^2\eta^2) \\
= &\; E(\xi^2) - a^2 E(\eta^2) \\
= &\; D(\xi) + E^2(\xi) - a^2[D(\eta) - E^2(\eta)] \\
= &\; \sigma_\eta^2 + (\mu_\xi - a\mu_\eta)^2 - a^2[\sigma_\eta^2 - (\mu_\xi + a\mu_\eta)^2] \\
= &\; \sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2 - a^2\sigma_\eta^2 - a^2\mu_\eta^2 \\
\mathrm{cov}(\zeta, \omega) = &\; E(\zeta\omega) - E(\zeta)E(\omega) = \sigma_\xi^2 - a^2\mu_\eta^2.
\end{aligned}
$$

31. 对随机变量ξ, η, 设$E\xi^2$, $E\eta^2$存在. 证明$E^2\xi\eta \leqslant E\xi^2 E\eta^2$.

解: 依题意得, $E\xi^2, E\eta^2$存在,

$$
\begin{aligned}
D(\xi\eta) &= E(\xi\eta - E(\xi\eta))^2 \\
&= E[\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta E(\xi\eta) + E^2(\xi\eta)] \\
&= E(\xi^2\eta^2) - 2E(\xi\eta)E(\xi\eta) + E^2(\xi\eta) \\
&= E(\xi^2\eta^2) - 2E^2(\xi\eta)) + E^2(\xi\eta) \\
&= E(\xi^2\eta^2) - E^2(\xi\eta)
\end{aligned}
$$

由于方差$D(\xi\eta) \geqslant 0$

即$E(\xi^2\eta^2) - E^2(\xi\eta) \geqslant 0$, 所以$E(\xi^2\eta^2) \geqslant E^2(\xi\eta)$.

32. 设正常成年男性每毫升血液中的白细胞数平均为7 300, 均方差为700. 试利用切比雪夫不等式估计一成年男性每毫升血液中白细胞数在$5,200 \sim 9,400$之间的概率.

解: 设每毫升含白细胞数为ξ, 则$E(\xi) = 7300, D(\xi) = 700^2$ 利用切比雪夫不等式:

$$
P(|\xi - 7300| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{700^2}{\varepsilon^2}
$$

$$
\begin{aligned}
P = P(5200 \leqslant \xi \leqslant 9400) &= P(5200 - 7300 < \xi - 7300 < 9400 - 7300) \\
&= P(-2100 < \xi - 7300 < 2100) \\
&= P(|\xi - 7300| < 2100) \\
&= | - P(|\xi - 7300| \geqslant 2100)| \\
&\geqslant 1 - \tfrac{700^2}{2100^2} = 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}
\end{aligned}
$$

所以成年男性每毫升血液中白细胞数在$5200 \backsim 9400$之间的概率为$\frac{8}{9}$

第 5 章

大数定律与中心极限定理

1. 设随机变量ξ和η的数学期望分别为-2和2, 方差分别为1和4, 相关系数为-0.5. 试根据切比雪夫不等式, 估计概率$P(|\xi+\eta|\leqslant 6)$的上界.

解: 1/12

2. 设随机变量列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立且都服从服从参数为2的指数分布. 试计算在$n\to\infty$时, $\eta_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$依概率收敛的极限值.

解: 1/2

3. 根据抽查, 某种电器元件的寿命服从均值为100小时的指数分布. 现随机地取16只, 设它们的寿命是相互独立的. 求这16只元件的寿命的总和大于1 920小时的概率.

解: 以$x_i(i=1,2,\cdots,16)$记第i只元件的寿命, 以T记16只元件寿命的总和: $T=\sum\limits_{i=1}^{16}x_i$, 由题意知$E(x_i)=100, D(x_i)=100^2$, 由$\frac{T-nE(x_i)}{\sqrt{n}\sigma}$近似服从$\backsim N(0,1)$分布可知:

$$\begin{aligned}
P(T>1920) &= P\left(\frac{T-16\times 100}{\sqrt{16}\times\sqrt{100^2}} > \frac{1920-16\times 100}{\sqrt{16}\times\sqrt{100^2}}\right)\\
&= 1-P\left(\frac{T-16\times 100}{\sqrt{16}\times\sqrt{100^2}} \leqslant \frac{1920-16\times 100}{\sqrt{16}\times\sqrt{100^2}}\right)\\
&= 1-\phi\left(\frac{1920-16\times 100}{\sqrt{16}\times\sqrt{100^2}}\right)\\
&= 1-\phi(0.8)\\
&= 0.2119
\end{aligned}$$

4. 设计算器在进行加法运算时, 对每个加数的小数部分进行舍入而得到最靠近它的整数. 设所有舍入误差相互独立, 且在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布. 现将1 200 个随机数相加, 求误差总和的绝对值超过15的概率.

解: 设第k个加数的舍入误差为$x_k(k=1,2,\cdots,1200)$, 已知x_k在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布, 故知$E(x_k)=0, D(x_k)=\frac{1}{12}$.

记$x=\sum\limits_{k=1}^{1200}x_k$, 则当$n$充分大时, $P(\frac{\sum\limits_{k=1}^{1200}x_k-nE(x_k)}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x)\approx\phi(x)$

于是

$$\begin{aligned}
P(|x|>15) &= 1-P(|x|\leqslant 15)\\
&= 1-P(|\frac{\sum\limits_{k=1}^{1200}x_k-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}|\leqslant\frac{15-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}})\\
&= 1-P(\frac{-15-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{1200}x_k-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}\leqslant\frac{15-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}})\\
&= 1-[2\phi(\frac{15-1200\times 0}{\sqrt{1200}\times\sqrt{\frac{1}{12}}})-1]\\
&= 0.13362
\end{aligned}$$

5. 设某工件包括10个部分, 每部分的长度是一个随机变量, 它们相互独立, 且均服从数学期望为2 mm, 均方差为0.05 mm的分布. 规定总长度为(20 ± 0.1) mm时产品合格. 求该工件合格的概率.

解: 以$x_i(i=1,2,\cdots,10)$记第i件产品的长度, 以L记10件产品的总长度: $L=\sum\limits_{i=1}^{10}x_i$, 由题意知$E(x_i)=2, D(x_i)=0.05^2$, 则$\frac{L-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}}\sim N(0,1)$分布, 故产品合格概率为:

$$\begin{aligned}
P(20-0.1<L<20+0.1) &= P(\frac{(20-0.1)-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}}<\frac{L-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}}<\frac{(20+0.1)-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}})\\
&= \phi(\frac{(20+0.1)-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}})-\phi(\frac{(20-0.1)-10\times 2}{\sqrt{10}\times\sqrt{0.05^2}})\\
&= 2\phi(0.63)-1\\
&= 0.4714
\end{aligned}$$

6. 设某批零件中单个零件的重量服从数学期望为0.5 kg, 均方差为0.1 kg的分布. 问5 000只零件的总重量超过2 510 kg 的概率是多少?

解: 以$X_i(i=1,2,...,5000)$记第i只零件的质量, 以W记5000只中的总质量, $W=$

$\sum_{i=1}^{5000} X_i$, 则

$$\begin{aligned} P(W > 2510) &= P(\tfrac{W-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1} > \tfrac{2510-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1}) \\ &= 1 - P(\tfrac{W-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1} \leqslant \tfrac{2510-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1}) \\ &= 1 - \phi(\tfrac{2510-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1}) \\ &= 1 - \phi(\sqrt{2}) \\ &= 0.0787 \end{aligned}$$

7. 有一批建筑房屋用的木柱, 其中80%的长度不小于3 m. 现从这批木柱中随机地取出100根, 问其中至少有30根短于3 m的概率是多少?

解: 有题可得检查100根木柱相当于做100重伯努利实验, 记X为被抽取的100根木柱中长度短于$3m$的根数, 则$X \sim b(100, \frac{1}{5})$, 于是:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 30) &= P[\tfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \geqslant \tfrac{30-E(X)}{\sqrt{D(X)}}] \\ &= 1 - P[\tfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} < \tfrac{30-E(X)}{\sqrt{D(X)}}] \\ &= 1 - \phi(\tfrac{30-E(X)}{\sqrt{D(X)}}) \\ &= 1 - \phi[\tfrac{30-100\times\frac{1}{5}}{\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times(1-\frac{1}{5})}}] \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

8. (1) 某复杂系统由100个相互独立起作用的部件所组成. 在整个运行期间每个部件损坏的概率为0.10. 为了使整个系统正常工作, 必须至少有85个部件正常工作. 求该系统正常工作的概率.

(2) 某复杂系统由n个相互独立起作用的部件所组成. 每个部件的可靠性为0.90, 且必须至少有80%的部件工作才能使整个系统正常工作. 问n至少为多大才能使系统的可靠性不低于0.95?

解: (1) 100个部件是否正常工作是100重伯努利实验, 以X表示100个部件中正常工作的件数, 则$X \sim b(100, 0.9)$, 由棣莫弗一拉普拉斯定律知: $\frac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}} \sim N(0,1)$, 则所

求概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 85)=&\ 1-P(X<85)\\=&\ 1-P(\tfrac{X-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}}<\tfrac{85-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}})\\=&\ 1-\phi(\tfrac{85-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}})\\=&\ 1-\phi(-\tfrac{5}{3})=0.9525\end{aligned}$$

(2) 同理可知这n个部件是否正常工作是n重伯努利实验, 以Y表示n个部件中正常工作的件数, 则$Y\sim b(n,0.9)$, 由棣莫弗一拉普拉斯定律知: $\frac{Y-0.9n}{\sqrt{0.9\times n\times0.1}}\sim N(0,1)$, 则所求概率为

$$\begin{aligned}P(Y\geqslant 0.8n)\ =&\ 1-P(Y<0.8n)\\=&\ 1-P(\tfrac{Y-0.9n}{\sqrt{0.9\times n\times0.1}}<\tfrac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.9\times n\times0.1}})\\=&\ 1-\phi(\tfrac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.9\times n\times0.1}})\end{aligned}$$

由系统可靠性不低于0.95, 即$P\geqslant 0.95$知: $1-\phi(\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.9\times n\times0.1}})\geqslant 0.95$, 可求得$n\geqslant 25$.

9. 某种电子器件的寿命的数学期望μ未知, 方差为$\sigma^2=400$. 为了估计μ, 随机地取n件该器件, 并在时刻$t=0$时刻独立地进行测试直到失效. 测得其寿命为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 以$\eta=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$作为$\mu$ 的估计. 为了使$P(|\eta-\mu|<1)\geqslant 0.95$, 问$n$至少为多少?

解: 由独立同分布的中心极限定理可知: $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}}{X_i}-n\mu\sqrt{n}\sigma\sim N(0,1)$. 即

$$\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}}{X_i}-\mu\sigma/\sqrt{n}\sim N(0,1)$$

由题知$D(X_i)=\sigma^2=400,\sigma^2=\sqrt{400}$, 于是可知: $\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\eta-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\eta-\mu}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}$且服从$N(0,1)$分布. 从而

$$\begin{aligned}P(|\eta-\mu|<1)=&\ P(-1<\eta-\mu<1)\\=&\ P(\tfrac{-1}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}<\tfrac{\eta-\mu}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}<\tfrac{1}{\sqrt{400}/\sqrt{n}})\\P(|\eta-\mu|<1)=&\ P(-1<\eta-\mu<1)\\=&\ P(\tfrac{-1}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}<\tfrac{\eta-\mu}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}<\tfrac{1}{\sqrt{400}/\sqrt{n}})\\=&\ \phi(\tfrac{1}{20/\sqrt{n}})-\phi(-\tfrac{1}{20/\sqrt{n}})\\=&\ 2\phi(\tfrac{1}{20/\sqrt{n}})-1\end{aligned}$$

又知$P(|\eta-\mu|<1)\geqslant 0.95$, 故利用$2\Phi\big(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\big)-1\geqslant 0.95$得

$$\Phi(1.96)\geqslant\Phi(\frac{1}{20/\sqrt{n}})\qquad \text{和} \qquad \frac{1}{20/\sqrt{n}}\geqslant 1.96$$

由此得$n\geqslant 1536.64$.

故n至少为1537次.

10. 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔中被盗索赔户占20%. 以ξ表示在随机抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数. 试写出ξ的概率分布, 并利用中心极限定理, 求被盗索赔户不少于14户且不多于30户的概率的近似值. (对标准正态分布函数$\Phi(x)$, $\Phi(1.5)=0.933$, $\Phi(2.5)=0.994$.)

解: (1) $\xi\sim b(100,0.2)$,即

$$P(\xi=k)=\mathrm{C}_{100}^{k}0.2^{k}0.8^{100-k},\quad k=1,2,\cdots,100.$$

(2) $\phi(1.5)+\phi(2.5)-1=0.927$

11. 设某生产线生产的产品进行箱包装. 设每箱的平均重为50kg, 标准差为5kg. 若用最大载重量为5t的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于0.977. ($\Phi(2)=0.977$.)

解: $n=98$

12. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为来自总体ξ的一个样本, 且已知

$$E\xi^k=\alpha_k,\quad k=1,2,3,4.$$

证明当n充分大时, 随机变量$\zeta_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$近似服从正态分布, 并给出分布函数.

解:

$$\frac{\zeta_n-E(\zeta_n)}{\sqrt{D(\zeta_n)}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2-E(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2)}{\sqrt{D(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2)}}\overset{n\to\infty}{\sim}N(0,1)$$

当n充分大时候,$\zeta_n\overset{n\to\infty}{\sim}N(\alpha_2,\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n})$, 所以它的正态分布的参数分别为$\alpha_2,\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$.

第 6 章

数理统计的基本概念

1. 设总体$X \sim N(0, 2^2)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_{15})$为来自$X$的一个样本, 求统计量

$$Y = \frac{{X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_{10}}^2}{2({X_{11}}^2 \ + {X_{12}}^2 + \cdots + {X_{15}}^2)}$$

的分布.

解: 因为$X_i \sim N(0, 2^2)$, $\frac{X_i}{2} \sim N(0,1)$, 所以$(\frac{X_i}{2})^2 \sim \chi(1)$, 根据$\chi^2$分布的可加性可知:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{10} (\tfrac{X_i}{2})^2 \sim \chi^2(10), \quad \chi_2^2 = \sum_{i=11}^{15} (\tfrac{X_i}{2})^2 \sim \chi^2(5)$$

并且χ_1^2和χ_2^2相互独立得:

$$F = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} (\frac{X_i}{2})^2/10}{\sum\limits_{i=11}^{15}}(\frac{X_i}{2})^2/5 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10}}{X_i^2} 2\sum_{i=11}^{15} X_i^2 = Y,$$

所以随机变量Y服从参数为(10,5)的F分布, 记为$Y \sim F(0, 5)$.

2. (1) 设(X_1, X_2, X_3, X_4)为来自正态总体$X \sim N(1, \sigma^2)$的一个样本. 求统计量$T_1 = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$的分布.

(2) 设(X_1, X_2, X_3)为来自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本. 求统计量$T_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$的分布.

解: (1) $t(1)$ (2) $t(1)$

3. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$为来自正态总体X的一个样本. 分别记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$
$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明统计量Z服从自由度为2的t分布.

解: 显然

$$U=\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1),\quad \chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2),$$

再由χ^2分布的性质

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}\sim\chi^2(2).$$

4. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1})$是取自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 令

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2.$$

试确定统计量$\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}$的分布.

解: $t(n-1)$

5. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$为来自X的一个简单样本. 求$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$的联合概率密度函数和样本均值$\overline{X}$ 的概率密度函数, 并求统计量$T=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i^2$的数学期望.

解: (1) 由题意得总体$X\sim N(\mu,\sigma)$,则X的概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

.

而样本$X_1,X_2,...,X_{10}$相互独立,且与总体X同分布, 故$(X_1,X_2,...,X_{10})$的联合概率密度函数为:

$$f(X_1,X_2,...,X_{10})=\prod_{i=1}^{10}f(X_i)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^{10}e^{\frac{-\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(2) 因为$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$, 则$\overline{X}$的概率密度函数为

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma/\sqrt{n})^2}},-\infty<x<+\infty$$

当$n=10$时, $f_x(x)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{\frac{-5(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$为来自标准正态总体X的一个样本. (1) 试给出常数c, 使$c({X_1}^2+{X_2}^2)$服从χ^2分布, 并指出它的自由度; (2) 试给出常数d, 使$\frac{d(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$服从$t$分布, 并指出它的自由度.

解: (1) 因为$X\sim N(0,1)$, 所以$X^2\sim\chi^2(1)=\Gamma(\frac{1}{2},2)$, Γ分布在相互独立的情况下满足可加性, 并且$X_2^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},2)$, Z_1^2,Z_2^2相互独立, 所以: $X_1^2+X_2^2\sim\Gamma(1,2)$, 即$\chi^2(2)$, 得$c=1$,且$X^2$分布的自由度为2.

(2) 因为$X_1\sim N(0,1)$,$X_2\sim N(0,1)$ 并且X_1,X_2相互独立, 所以$X_1+X_2\sim N(0,2)$, $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$. 又因为$X_3\sim N(0,1)$,$X_4\sim N(0,1)$,, $X_5\sim N(0,1)$,并且X_3,X_4,X_5相互独立, 所以$X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^3(3)$, $\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}=\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$, 所以$d=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 自由度为3.

7. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{2n})$为来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本, 其中$n\geqslant 2$. 求统计量$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+n}-2\overline{X})^2$的数学期望.

解: 考虑$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{n+n})$, 将其视为取自总体$N(2\mu,2\sigma^2)$的样本, 则其样本均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+1})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X},$$

样本方差为$\frac{1}{n-1}Y$. 由于$E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$, 所以

$$E(Y)=(n-1)(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2.$$

8. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & 若|x|<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_{50})$为来自X的一个样本. 求(1)$\overline{X}$的数学期望与方差; (2) S^2的数学期望; (3) $P(|\overline{X}|>0.02)$.

解: (1) $E(\overline{X})=0,D(\overline{X})=1/100$

(2) $E(S^2)=1/2$;

(3) $P(|\overline{X}|>0.02)=0.8414$.

9. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$分别为来自正态总体$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$的两个样本. 求下述统计量的数学期望

$$T=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2}{m+n-2}.$$

解: σ^2

10. 在天平上重复称量一重为a的物品, 假设各次称量结果相互独立且都服从正态分布$N(a,0.2^2)$. 若以$\overline{X}_n$表示n次称量结果的均值, 则为使

$$P(|\overline{X}_n-a|<0.1)\geqslant 0.95,$$

n的最小取值不应小于多少.

解: 16.

11. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$为来自总体$X\sim\chi^2(n)$的一个样本. 求$E\overline{X}$, $D\overline{X}$, ES^2.

解: 因为$X\sim\chi^2(n)$, 所以$E(X)=n$, $D(X)=2n$.

$$\begin{aligned}
E(\overline{X})= &\ E(\tfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}X_k)=\tfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}E(X_k)=\tfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}n=n,\\
D(\overline{X})= &\ D(\tfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}X_k)=\tfrac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}D(X_k)=\tfrac{1}{100}\sum_{k=1}^{10}2n=\tfrac{n}{5},
\end{aligned}$$

$$E(S_*^2)= E(\tfrac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}(X_k-\overline{X})^2), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10}(X_k-\overline{X})^2= &\ \sum_{k=1}^{10}(X_k^2+\overline{X}^2-2X_k\overline{X})\\
= &\ \sum_{k=1}^{10}X_k^2+10\overline{X}^2-2\overline{X}\sum_{k=1}^{10}X_k\\
= &\ \sum_{k=1}^{10}X_k^2-10\overline{X}^2,
\end{aligned}$$

将其代入(1)式得:

$$E(S_*^2)=\tfrac{1}{9}\sum_{k=1}^{10}E(X_k^2)-\tfrac{10}{9}E(\overline{X}^2)=\tfrac{1}{9}(2n+n^2)-\tfrac{10}{9}(\tfrac{n}{5}+n^2)=2n$$

12. (1) 已知某种能力测试的得分服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 随机取10 个人参与这一测试. 求他们得分的联合概率密度函数, 并求这10个人得分的平均值小于μ的概率.

(2) 设(1) 中$\mu=62,\sigma^2=25$, 若得分超过70就能得奖, 求至少有一人得奖的概率.

解: (1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{1} 0\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $P(\overline{X}<\mu)=1/2$,

(2) 0.431

第 7 章

参数估计

1. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & 若 x\geqslant\theta, \\ 0, & 若 x<\theta, \end{cases}$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自该总体的一个样本. 求未知参数θ的矩估计量.

解: $\overline{X}-1$

2. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \theta, & 若\ 0<x<1, \\ 1-\theta, & 若\ 1\leqslant x<2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

其中, $\theta\in(0,1)$未知, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自该总体的一个样本, 记N为样本值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中小于1的个数. 求θ的最大似然估计.

解: $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

3. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & 若\ \theta\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

其中θ为未知参数. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自该总体的一个样本. 求θ的矩估计量和最大似然估计量.

解: (1) θ的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

(2) θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

4. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{如果 } x>0, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中, 参数$\lambda > 0$未知. 又设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自该总体的一个样本. 分别求参数λ的矩估计量和最大似然估计量.

5. 设总体X的概率分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases} 1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & \text{如果 } x>\alpha, \\ 0, & \text{如果 } x\leqslant\alpha, \end{cases}$$

其中, 参数$\alpha > 0, \beta > 1$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自X的一个样本. 求$\alpha = 1$时, 未知参数β的矩估计量和最大似然估计量; $\beta = 2$时, 未知参数α的最大似然估计量.

6. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & \text{若}0<x<1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$\theta > -1$是未知参数, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自该总体X的一个样本. 分别求θ的矩估计量和最大似然估计量.

解: (1) 矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}},$$

(2) 最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

7. 设总体X的分布律为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中, $\theta \in (0,1)$为未知参数. 分别求基于样本值$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$的参数$\theta$的矩估计值和最大似然估计值.

8. 设一批电子元件的寿命T服从双参数c, θ的指数分布, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}\,\mathrm{e}^{-(x-c)/\theta}, & \text{如果 } x\geqslant c, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中, $c, \theta > 0$为未知参数. 从这批电子元件中随机抽取n件进行寿命检验. 设它们的有效期依次为$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, 试分别求参数$\theta$、$c$的最大似然估计和矩估计.

9. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} \cdot e^{-\frac{\theta}{x}}, & \text{若} x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中$\theta > 0$未知, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体X的一个样本. 求参数θ的矩估计量和最大似然估计量.

解: (1) θ的矩估计量为$\hat{\theta} = \overline{X}$.

(2) θ的最大似然估计量为$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$.

10. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1}, & \text{如果 } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的总体的一个样本. 求$U = \mathrm{e}^{-1/\theta}$的最大似然估计值.

11. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自正态总体$N(\mu, 1)$的一个样本, 其中μ 未知. 求$\theta = P(X > 2)$的最大似然估计.

12. 设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}, & \text{如果 } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, $\theta > 0$待定. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体X的一个样本. 试验证θ的最大似然估计量为$\hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$, 并证明它是$\theta$的无偏估计量.

13. 设总体X的分布函数为

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & \text{若} x > 0, \\ 0, & \text{若} x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中, $\theta > 0$为未知参数, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体X的一个样本. 求EX, EX^2和θ的最大似然估计, 并计算是否存在常数a, 使得对任何$\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - a| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

解: (1) $E(X)=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}, E(X^2)=\theta.$

(2) θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2.$

(3) 由辛钦大数定律

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}EX^2=\theta,$$

即存在$a=\theta$使得对任意$\varepsilon>0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon)=0.$$

14. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$, 其中σ未知. 记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度函数$f_Z(z)$;

(2) 设$(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$为来自总体Z的一个样本. 求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$;

(3) 证明$\hat{\sigma}^2$是σ^2的无偏估计.

解: (1) $f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty<z<+\infty.$

(2) $\hat{\sigma^2}=\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2.$

(3) 由于$E(\hat{\sigma^2})=E(\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2)=\frac{1}{3}E(Z^2)=\sigma^2$ 故$\hat{\sigma^2}$是σ^2的无偏估计.

15. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的一个样本, 其样本均值为$\overline{X}$. 记$Y_i=X_i-\overline{X}$, $i=1,2,\cdots,n$.

(1) 求Y_i的方差$D(Y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$;

(2) 求Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{cov}(Y_1,Y_n)$;

(3) 若$c(Y_1+Y_n)^2$是σ^2的无偏估计量, 求常数c.

解: (1) $D(Y_i)=\frac{n-1}{n}\sigma^2, i=1,2,\cdots,n.$

(2) $cov(Y_1,Y_n)=-\frac{1}{n}\sigma^2.$

(3) $E[c(Y_1+Y_n)^2]=\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2=\sigma^2$, 从而$c=\frac{n}{2(n-2)}$.

16. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本. 令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}-\frac{1}{n}S^2.$$

证明T是μ^2的无偏估计量, 并求$D(T)$在$\mu=0,\sigma=1$时的值.

解: (1) $E(T)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$.

(2) $D(T)=D(\overline{X^2})+\frac{1}{n^2}D(S^2)=\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2}{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$.

17. 设$(0.50,1.25,0.80,2.00)$为来自总体X的一个样本值. 已知$Y=\ln X$服从正态分布$N(\mu,1)$. 求X的数学期望EX和μ的置信度为0.95的置信区间, 并利用上述结果求$b=EX$的置信度为0.95的置信区间.

解: (1) $b=E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$

(2) μ的95%的置信区间为$(-0.98,0.98)$,

(3) b的95%的置信区间为$(e^{0.48},e^{1.48})$,

18. 用机器装罐头, 已知罐头重量服从正态分布$N(\mu,0.02^2)$. 随机抽取25个罐头进行测量, 算得其样本均值为1.01千克. 求总体期望μ的置信度为95%的置信区间.

19. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ未知, $\sigma^2=4,(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其样本.

(1) 当$n=16$时, 求置信度分别为90%和95%的μ的置信区间的长度.

(2) n多大才能使μ的90%的置信区间长度不超过1?

(3) n多大才能使μ的95%的置信区间长度不超过1?

解: (1) 90%的置信区间长度为$\Delta=1.65$, 95%的置信区间长度为$\Delta=1.96$.

(2) 90%的置信区间长度不超过1, 则$n\geqslant 44$.

(3) 95%的置信区间长度不超过1, 则$n\geqslant 62$.

20. 设一批零件长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 其中μ,σ^2均未知. 现从中随机抽取16个零件, 测得样本均值$\overline{x}=20(\mathrm{cm})$, 样本标准差$s=1(\mathrm{cm})$, 求$\mu$的置信度为90%的置信区间.

解: $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$ 即$(19.56,20.44)$

21. 为比较A牌和B牌灯管的寿命, 随机抽取A牌灯管10只, 测得平均寿命$\overline{x}=1\,400$小时, 修正样本标准差$s_1=52$小时; 随机抽取B牌灯管8只, 测得平均寿命$\overline{y}=1\,250$小时, 修正样本标准差$s_2=64$小时. 设两总体都服从正态分布, 且方差相等, 求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的95%的置信区间.

第 8 章

假设检验

1. 抽取某班级28名学生的语文考试成绩, 得样本均值为80分, 修正样本标准差为8. 若全年级语文成绩平均是85分, 试问该班学生语文的平均成绩有无显著差异?($\alpha = 0.05$)

2. 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其他条件都尽可能做到相同. 先用标准方法炼一炉然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了10炉, 其得率分别为

标准方法	78.1	72.4	76.2	74.3	77.4	78.4	76	75.5	76.7	77.3
新方法	79.1	81.0	77.3	79.1	80.0	79.1	79.1	77.3	80.2	82.1

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2,\ \sigma^2)$, μ_1、μ_2、σ^2均未知. 问建议的新操作方法能提高得率? (取$\alpha = 0.05$)

3. 某元件的寿命X(以小时记) 服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$, μ、σ^2均未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159 280 101 212 224 379 179 264 222 362 168 250 149 260 485 170.

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225小时($\alpha = 0.05$).

4. 由甲、乙两台机床加工同样产品, 从它们的产品中分别随机抽取8件和6件, 测得这些样品直径(单位:mm)的均值和方差分别为

$$\overline{x} = 201, \quad \overline{y} = 198, \quad s_1^2 = 0.17, \quad s_2^2 = 0.14.$$

假定两个总体都服从正态分布, 且方差相等. 试问在显著性水平$\alpha = 0.05$下:

(1) 甲、乙两台机床加工的产品平均直径有无显著差异;

(2) 这两个总体的方差是否有显著的差异.

5. 设某次考试的考生成绩服从正态分布, 从中随机抽取36位考生的成绩, 算得平均成绩为66.5分, 标准差为15分. 问在显著性水平0.05下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？并给出检验过程.

解: $|t| = |\sqrt{36} \times \frac{66.5-70}{15}| = 1.4 < 2.0301$ 接收原假设, 即在显著性水平0.05下, 认为这次考试全体考生的平均成绩是70 分.

6. 下面是列出的某工厂随机选取的20只部件的装配时间（分钟）：

$$9.8,\ 10.4,\ 10.6,\ 9.6,\ 9.7,\ 9.9,\ 10.9,\ 11.1,\ 9.6,\ 10.2,$$

$$10.3,\ 9.6,\ 9.9,\ 11.2,\ 10.6,\ 9.8,\ 10.5,\ 10.1,\ 10.5,\ 9.7.$$

设装配时间总体服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$, 其中μ, σ^2未知. 是否可以认为装配时间的均值μ显著大于10?$(\alpha = 0.05)$

解: $t = \frac{\overline{x}-10}{s/\sqrt{n}} = 1.754 > 1.729$拒绝原假设.

7. 下表分别给出文学家马克・吐温(M)的8篇小说文和斯诺特格拉斯(S)的10篇小品文中由3个字母组成的单字的比例. 设两组数据分别来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 其中$\mu_1, \mu_2$, σ_1^2, σ_2^2均未知, 两样本独立.

M	0.225	0.262	0.217	0.240	0.230	0.229	0.235	0.217		
S	0.209	0.205	0.196	0.210	0.202	0.207	0.224	0.223	0.220	0.201

(1)检验假设$(\alpha = 0.05)$: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

(2)在(1)的基础上检验假设$(\alpha = 0.05)$: $H_0' : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1' : \mu_1 \neq \mu_2.$

解: (1)F检验, $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 且

$$F_{0.975}(7, 9) < \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{0.025}(7, 9),$$

即认为方差无显著差异.

(2)$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = 3.9000 > 2.1199 = t_{0.025}(16)$ 拒绝H_0', 认为均值有显著差异.

8. 随机地选择了8个人, 分别测量了他们在早晨起床时和晚上就寝时的身高(cm), 得到以下数据:

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
早上(x_i)	172	168	180	181	160	163	165	177
晚上(y_i)	172	167	177	179	159	161	166	175
$d_i = x_i - y_i$	0	1	3	2	1	2	-1	2

设各对数据的差$D_i = X_i - Y_i \ (i = 1, 2, \cdots, 8)$为来自正态总体$N(\mu_D, \sigma_D^2)$的样本, μ_D, σ_D^2均未知. 试问是否可以认为早晨的身高比晚上的身高要高? ($\alpha = 0.05$)

解: $t = \frac{\bar{d}-0}{s_D/\sqrt{n}} = 2.758 > 1.8946 = t_{0.05}(7)$ 拒绝原假设, 认为早晨身高比晚上身高高.

9. 如果一个矩形的宽度w与长度l的比$\frac{w}{l} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$, 这样的矩形称为黄金矩形. 下面列出某工艺品工厂随机取的20个矩形的宽度与长度的比值:

0.693, 0.749, 0.654, 0.670, 0.662, 0.672, 0.615, 0.606, 0.690, 0.628,
0.668, 0.611, 0.606, 0.609, 0.601, 0.553, 0.570, 0.844, 0.576, 0.933,

设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值总体服从正态分布, 其均值为μ, 方差为σ^2, 其中μ, σ^2未知. 试检验假设(取$\alpha = 0.05$)

$$H_0 : \mu = 0.618, \qquad H_1 : \mu \neq 0.618.$$

解: $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = 2.055 < 2.093 = t_{0.025}(19)$. 即在显著水平$\alpha = 0.05$下, 接受原假设$H_0$.

10. 杜鹃总是把蛋生在其他鸟的鸟巢中. 今从两种鸟巢中收集到杜鹃蛋24只, 其中9只来自同一种鸟的鸟巢, 另外15只来自另一种鸟的鸟巢. 对这两种杜鹃蛋, 它们的长度见下表(单位：mm)

样本1	21.2	21.6	21.9	22.0	22.0	22.2	22.8	22.9	23.0
样本2	19.8	20.0	20.3	20.8	20.9	20.9	21.0	21.0	21.0
	21.2	19.8	21.5	22.0	22.1	22.3			

设两种杜鹃蛋的长度服从同方差的正态分布. 试鉴别杜鹃蛋的长度与他们被放置的鸟巢种类是否有关($\alpha = 0.05$).

解:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{1/m + 1/n}} \sim t(m + n - 2)$$

计算得到$t=\frac{22.18-21.12}{0.706\sqrt{1/9+1/15}}\approx 3.56>2.074=t_{0.025}(22)$, 即拒绝原假设, 认为, 杜鹃蛋的长度与它们发现杜鹃蛋的鸟巢的不同有关.

11. 某化工厂为提高某化学药品的得率, 提出了两种改进方案. 为研究哪一种改进方案更好, 分别对它们进行试验, 测得数据如下：

方案1	68.1	62.4	63.3	64.7	68.4	66.0	65.5	66.7	67.3	66.2
方案2	69.1	71.0	69.1	70.0	69.1	69.1	67.3	70.2	72.1	67.3

假设得率服从正态分布, 问方案2是否比方案1的得率有显著提高?(取$\alpha=0.05$)

解: (1)首先检验$\sigma_1^2=\sigma_2^2$接受原假设, 认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,

（2）再检验$\mu_1=\mu_2$,统计量为$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$ 拒绝原假设, 认为方案乙比方案甲显著提高得率.

12. 设袋中有10个球, 其颜色有白与黑两种, p表示白球所占比例. 有待检验的统计假设是

$$H_0: p=\frac{1}{2}, \quad H_1: p=\frac{1}{5}.$$

从袋中有放回抽取4个球, 其中白球数小于2时, 拒绝H_0, 否则接受H_0. 试给出总体及其分布形式, 并对给定显著性水平$\alpha\in(0,1)$, 给出检验法的拒绝域与接受域, 犯第一类错误及第二类错误的概率.

解: (1)$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$,

(2)样本容量$n=4$, X_1, X_2, X_3, X_4.

(3)拒绝域为

$$W=\{(x_1,\cdots,x_4)|\}$$

(4) 犯第一类错误的概率

$$\alpha=5/16=0.3125.$$

犯第二类错误的概率

$$\beta=113/625=0.1808.$$

13. 设$(X_1, X_2,\cdots,X_n)$为来自正态总体$N(\mu, 0.04)$的一个样本. 对假设检验问题

$$H_0: \mu=0.5, \quad H_1: \mu=\mu_1>0.5,$$

取单侧检验拒绝域$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \overline{x} \geqslant c\}$，其中$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$为样本均值. 在$\alpha = 0.05, \mu_1 = 0.65$时，为使犯第二类错误的概率$\beta$不超过0.05，样本容量$n$至少应取多少？

解: 20

14. 设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$. 今从总体$X$中抽取样本$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$，从总体$Y$中随机抽取样本$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$，两样本独立. 试对如下假设检验

$$H_0 : \mu_1 = k\mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq k\mu_2,$$

其中$k \neq 0$，寻找合适的检验统计量并给出H_0的拒绝域$(\alpha = 0.05)$.

解: 检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - k\overline{Y}}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{k^2m + n}} \Big/ \frac{S_w}{\sigma} = \frac{\overline{X} - k\overline{Y}}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{k^2m + n}} \sim t(m + n - 2).$$

拒绝域为

$$|T| > t_{\alpha/2}(m + n - 2).$$